Homeomorphismer och diffeomorphismer

DEFINITION : Låt $X \subseteq \mathbf{R}^n$ och $Y \subseteq \mathbf{R}^m$. En funktion $f : X \to Y$ kallas för en *homeomorfism* om f är en kontinuerlig bijektion med en kontinuerlig invers. Om det finns en sådan f, X och Y kallas för *homeomorfa*, och man säger att X och Y är *topologiskt ekvivalenta*.

Om både f och f^{-1} är till och med C^∞ funktioner, då kallas f för en *diffeomorfism*. I detta fall, X och Y kallas för *diffeomorfa*.

I komplex analys, man kan betrakta två delmängder X och Y till $\mathbf{C}$. De kallas för *(komplext) diffeomorfa* om det finns en analytisk bijektion där emellan i båda riktningar.

Vi har inte definierat termen *analytisk* men man kan bevisa att om två delmängder till $\mathbf{C}$ är komplext diffeomorfa, då är de också diffeomorfa som delmängder till $\mathbf{R}^2$.

Jordan curve theorem

DEFINITION : Låt $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ vara en kurva i n-space. Kurvan kallas för *sluten* om $\phi(0) = \phi(1)$. Kurvan kallas för *enkel (eng.: simple)* om $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$ för alla $t_1 \neq t_2$.

Sats (Jordan curve theorem). *Låt C vara en sluten, enkel kurva i planet. Då består $\mathbf{R}^2 - C$ av precis två öppna, sammanhängande område.*

Dessa område kallas för kurvans *insida* och *utsida*. JCT är intuitivt 'klart' men mycket svårt att bevisa (åtminstone, inget elementär bevis är kännt).

Riemann Mapping Theorem

En vanlig tillämpning av JCT är att bevisa att en sluten skiva i $\mathbf{R}^2$ kan inte vara topologiskt ekvivalent med en annulus (se inlämningsuppgift 2). Intuitivt, skillnaden mellan en skiva och en annulus är att den senare har ett *hål*. Man kan ge en precis formulering av följande definition (t.ex. Massey, 'Algebraic Topology', Springer-Verlag) :

DEFINITION : En sammanhängande delmängd till $\mathbf{R}^n$ kallas för *enkelt sammanhängande (eng.: simply connected)* om den har inga hål.

Då finns det följande berömd sats :

Sats (Riemann Mapping Theorem). *Varje två enkelt sammanhängande öppna delmängder till* $\mathbf{C}$, *med undantag av* $\mathbf{C}$ *själv, är diffeomorfa.*

För ett bevis, se t.ex. Ahlfors, 'Complex Analysis', Kap. 6. Det följer från *Liouville's sats* (en begränsad analytisk funktion är konstant) att $\mathbf{C}$ själv kan inte vara diffeomorfa med ett begränsad enkelt sammanhängande område.