1 Sammandrag av föreläsning 1 Tisdag 2/11/99

Det viktigaste målet i denna kurs är att utviga teorin av den *Riemanniska integralen*, som ni har sett i envariabelanalys, till reellvärda funktioner av flera variabler. I stort sett, ska vi betrakta bara funktioner av två eller tre variabler, där den geometriska betydelse av en (definit) integral är klarare och eftersom dessa är de viktigaste fallen i tillämpningar. Kom ihåg från envariabelanalys att vi kan ge en precis mening till uttrycket

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

för varje funktion i $C^0[a,b]$ via så kallade Riemann summor (om ni har glömt de lämpliga fakta, ska vi göra lite repetition nere). Det finns också icke-kontinuerliga funktioner som kan behandlas i Riemann's teori, men en bättre teori för sådana funktioner är *Lebesgue integration*. Eftersom vi ska inte diskutera Lebesgue's teori i denna kurs (trots att den är också viktig i tillämpningar), kan ni anta att, mer eller mindre, alla funktioner som ska betraktas under kursen är kontinuerliga.

Om vi tar, till exempel, en funktion $f(x,y)$ av två variabler, ska vi visa hur man ger en precis mening till uttrycket

$$\int\int_\Delta f(x,y)dxdy, \tag{2}$$

där Δ är, i början, ett kompakt område i $\mathbf{R}^2$, som generaliserar en sluten intervall $[a,b]$ i $\mathbf{R}$. Liksom det finns kompakta delmängder till $\mathbf{R}$ som inte är slutna intervaller, så också är det problematiskt att definiera (2) för en godtycligt kompakt delmängd till $\mathbf{R}^2$. Men (2) kan definieras, som vi skall visa, när Δ är en sluten, axelparallell rektangel $[a,b]\times[c,d]$ och i en mer allmän situation som oftast uppfylls i tillämpningar. Bevis av de lämpliga satserna kommer i nästa föreläsning.

För att dessa bevis kan genomförs, dock, behöver vi en egenskap av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder, nämligen att de är *likformigt* kontinuerliga. Alltså, börjar vi med en diskussion av likformigt kontinuitet.

Likformig kontinuitet

Kom ihåg att en funktion $f : X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sägs vara *kontinuerlig* i en punkt $a \in X$ om, för varje $\epsilon > 0$, det finns $\delta > 0$ så att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon. \tag{3}$$

Om f är kontinuerlig på hela X, då följer det att, för varje given ϵ finns det, för varje punkt a i X en $\delta = \delta_{a,\epsilon} > 0$ så att (3) stämmer. Men, i allmänhet, $\delta_{a,\epsilon}$ beror på a och det finns ingen $\delta = \delta_\epsilon > 0$ som passar alla $a \in X$. Ekvivalent, man kan hitta i allmänhet par a, b av punkter i X som är godtyckligt nära varandra men så att $|f(a)-f(b)| > \epsilon$ (obs! detta ekvivalens är kanske lite subtil, men det är viktig att förstå det).

Alltså, om vi kan ju välja en δ_ϵ som passar alla punkter i X, denna låter som en viktig extra egenskap till funktionen f. Vi ger ett namn till egenskapen där vi kan göra ett sådant val för alla $\epsilon > 0$. Mer precist :

Definition : Låt $f : X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ vara kontinuerlig. Vi säger att f är *likfomigt kontinuerlig på* X om, för varje $\epsilon > 0$ finns det $\delta = \delta_\epsilon > 0$ så att

$$\forall\, a, b \in X,\ |a-b| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \epsilon. \tag{4}$$

Intuitivt (för mig åtminstone !), låter likformigt kontinuitet som ett mycket starkare villkor än kontinuitet. Å andra hand, är det också klart från definitionen att 'whether or not' (? svenska) den kontinuerliga funktionen f är likformigt kontinuerlig beror så mycket på definitionsmängden som på 'inneboende' (intrinsic) egenskaper till f (t.ex.: om X är en enda punkt, då är alla kontinuerliga funktioner på X triviallt likformigt kontinuerliga). Men det är fortfarande kanske lite av en överraskning att ALLA kontinuerliga funktioner med KOMPAKTA definitionsmängder är likfomigt kontinuerliga. Dvs, har vi följande sats :

Sats. *Om $f : X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig och X kompakt, då är f likformigt kontinuerlig på X.*

Bevis : Vi gav ett bevis men det behövs inte lära det. Ett alternativt bevis finns i GLO, s. 50.

OBS! (a) Kanske ni undrar vad som händer när definitionsmängden inte är kompakt, t.ex. om definitionsmängden är hela $\mathbf{R}^n$. Intuitivt, en kontinuerlig funktion är likfomigt kontinuerlig i detta fall om dess derivata är begränsad (om den existerar). Man kan bevisa, faktiskt, att en C^1-funktion (dvs en funktion som uppfyller den n-dimensionella medelvärdessatsen) med en begränsad gradient är likformigt kontinuerlig. Den har egentligen en starkare egenskap, nämligen *Lipschitz kontinuitet.* Just nu kan jag inte tänka på någon del av kursen där vi ska använda Lipschitz kontinuerliga funktioner, så ska vi inte gå djupare in i denna diskussion här. Men ni kan titta i GLO 1.6 för lämpliga definitioner och satser.

(b) Senare i kursen (GLO, kap. 3) kommer vi att införa begreppet *likformigt konvergens* för punktföljder, serier och följder av funktioner. Det är lätt att röra ihop de två begreppen 'likformigt kontinuitet' och 'likformigt konvergens', så gör det inte !!!

Återblick på den 1-dimensionella Riemann integralen

Kom ihåg följande fakta från envariabelanalys :

DEFINITION 1 : Låt $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Vi säger att f är *Riemann integrerbar* på $[a, b]$ om

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{5}$$

existerar, där gränsvärdet tas över alla indelningar (partitions) $a = x_0 < x_1 < \ \dots\ < x_n = b$ av $[a, b]$ så att längden av varje delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ går mot 0 när $n \to \infty$ och c_i är en godtycklig punkt i intervallen $[x_i, x_{i+1}]$.

ANMÄRKNING : Summan i (5) kallas för en *Riemann summa.*

DEFINITION 2 : Om ovanstående gränsvärde existerar kallas det för den *Riemann integralen till f från a till b* och betecknas $\int_a^b f(x)dx$.

Sats. Varje kontinuerlig $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ är Riemann integrerbar.

ANMÄRKNING : Jag tror att ni måste ha hoppat över beviset av denna sats i envariabelanalys, ty man måste använda likformigt kontinuitet av f. Lite senare, kommer vi att bevisa satsens generalisering till $\mathbf{R}^2$.

Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ kan vi tolka $\int_a^b f(x)dx$ som arean under grafen $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ där arear under x-axeln räknas negativa.

Om vi fixerar en indelning $a = x_0 < x_1 < \ \dots\ < x_n = b$ och ett val av $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$, den funktion som antar det konstanta värdet $f(c_i)$ mellan x_i och x_{i+1} är en 'piecewise' konstant funktion som kallas för en *trappfunktion.* Det är lätt att se från Definition 1 att varje trappfunktion (dvs 'piecewise' konstant funktion) i $[a, b]$ är Riemann integrerbar. Också, varje term i summan (5) kan betraktas som en rektangulär area.

Alltså, för en kontinuerlig f kan ovanstående satsen tolkas intuitivt som att säga :

' om vi approximerar f bättre och bättre med trappfunktioner, då får vi bättre och bättre approximationer till arean under f's graf med summor av rektangulära arear'.

Denna observation kommer att bli central i generaliseringen av den Riemann integralen till högre dimensioner.

2 Sammandrag av föreläsning 2
Torsdag 4/11/99

Förra gången gav vi en lite pratlig definition av Riemann integrerbarhet för funktioner av en variabel på en sluten intervall och framställde utan bevis att varje kontinuerlig funktion hade denna egenskap. För att bevisa denna faktum och dess generalisering till $\mathbf{R}^2$ (senare också $\mathbf{R}^3$ och i princip alla $\mathbf{R}^n$) behöver vi en mer precis definition som vi kan jobba med utan tvek.

Genom dagens föreläsning, betraktar vi bara funktioner $f : \Delta \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ där Δ är en sluten, begränsad, axelparallell (SBA) rektangel. Nästa gång, försöker vi att skapa någon slags teori av integration över mer allmäna 2-dimensionella område.

DEFINITION 1 : Låt Δ vara en SBA rektangel i $\mathbf{R}^2$. En reellvärd funktion på Δ kallas för *enkel (eng.: simple)* om den antar ändliga många värde[1].

NOTATION : Om den enkla funktionen Λ antar de n värden $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i de delmängderna $\Delta_1, ..., \Delta_n$ resp. till Δ, betecknar vi detta som $\Lambda = (\lambda_i; \Delta_i)$.

DEFINITION 2 : Den enkla funktionen $\Lambda = (\lambda_i; \Delta_i)$ kallas för en *trappfunktion* om varje Δ_i är också en BA rektangel[2]. Konventionen här är att rektangeln Δ_i är sluten om den har en gemensam sida med Δ's topp eller höger sida, och annars är en rektangel av formen $[x_s, x_{s+1}) \times [y_t, y_{t+1})$.

DEFINITION 3 : Låt $\Lambda = (\lambda_i; \Delta_i)$ vara en trappfunktion på Δ. Den *Riemann integral* av Λ över Δ ges av

$$\int\int_{\Delta} \Lambda dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(\Delta_i), \tag{6}$$

där μ betyder 'area'.

Den geometriska tolkningen av Definition 3 är klar. Den integral av Λ kan uppfattas som volymen mellan ytan $z = \Lambda(x, y)$ och området Δ i det

[1] I Lebesgue integration, tillåter man ett av dessa värde att vara ∞. En integrerbar funktion måste anta värdet ∞ på en mängd av *Lebesgue mät* noll. Se [1] eller [2]

[2] I Lebesgue integration, varje Δ_i måste vara en *Lebesgue mätbar* mängd.

xy-planet, där volymer under planet betraktas vara negativa.

Det är också klart från definitionen att integralen av en trappfunktion kan representeras som en *itererad integral*, dvs om $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ då har vi

$$\int\int_\Delta \Lambda dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b \Lambda(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d \Lambda(x,y)dy \right) dx, \quad (7)$$

där de sista två uttrycken hänvisar till vanliga 1-dimensionella Riemann integraler.

DEFINITION 4 : Låt f vara en reellvärd funktion i Δ. Vi säger att f är *Riemann integrerbar* över Δ om, för varje $\epsilon > 0$ det finns trappfunktioner Φ, Ψ i Δ så att

(I) $\Phi \leq f \leq \Psi$[3].
(II) $\int\int_\Delta \Psi - \int\int_\Delta \Phi < \epsilon$.

Om f är Riemann integrerbar, följer det att

$$\sup_{\Phi \leq f} \int\int_\Delta \Phi = \inf_{\Psi \geq f} \int\int_\Delta \Psi, \quad (8)$$

där supremum (resp. infimum) tas över alla trappfunktioner i Δ som är likformigt mindre (resp. större) än f.

Det gemensamma värdet i (8) kallas för den *Riemann integralen* av f över Δ.

De 2 viktigaste satserna

Den första satsen utvigar (7) och ger en praktisk metod för att beräkna integralerna av många funktioner genom att reducera problemet till att beräkna två 1-dimensionella definita integraler. Vi har

Sats 1. *Om $f : \Delta \to \mathbf{R}$ är Riemann integrerbar, och den itererade integralen $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ existerar, då är den lika med den Riemann*

[3]Notera att enligt denna definition, varje integrerbar funktion är begränsad. Ofta, vill man också definiera så kallade 'generaliserade integraler' av obegränsada funktioner. Den kommer vi att göra senare.

integralen till f över Δ. Detsamma gäller den andra itererade integralen.

Bevis : Gavs i föreläsningen. Se också PB, sats 6.2.

Existens av de itererade integralerna är en fråga som inte är bäst behandlas inom ramen för Riemann integration. Om vi betraktar Lebesgue integraler i stället, då kan man bevisa att om $f : \Delta \to \mathbf{R}$ är Lebesgue integrerbar, då existerar båda itererade integraler och Sats 1 stämmer. Detta är ett berömd resultat, som kallas för *Fubini's sats*. För ytterligare detaljer, se [1] eller [2] t.ex.

En alternativ och mycket interessant fråga är följande : antag att $f : \Delta \to \mathbf{R}$ är en funktion så att både itererade Riemann integraler existerar - måste f vara integrerbar ? Svaret är nej : ett exempel presenteras i en annan dokument på kursens hemsida [3]. Fler exempel, inom ramen för Lebesgue integration, finns i [2], avsnitt 8.9.

Alltså, ser vi från dessa anmärkningar att det viktigaste saken är att ha allmäna villkor som garanterar integrerbarhet av en funktion $f : \Delta \to \mathbf{R}$. Då kan vi alltid beräkna $\int\int_\Delta f$ som en itererad Lebesgue integral, och oftast som en vanlig itererad Riemann integral också.

Lyckligtvis, är det inte svårt att hitta en stor klass av integrerbara funktioner. Den viktigaste sådan klass ges av följande sats :

Sats 2. *Låt $f : \Delta \to \mathbf{R}$ vara kontinuerlig. Då är f Riemann integrerbar, både itererade Riemann integraler existerar och*

$$\int\int_\Delta f\, dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{9}$$

Bevis : Gavs i föreläsningen. Samma bevis finns i boken (sats 6.3). Notera den centrala rollen som spelas av likformigt kontinuitet av f på den kompakta mängden Δ.

Nästa gång, kommer vi att visa att integrerbarhet garanteras av ett lite svagare villkor än kontinuitet. Detta ska inleda en diskussion om integrerbarhet över mer allmäna område än slutna rektangler.

Referenser

[1] Royden H.L., Real Analysis.
[2] Rudin W., Real and complex analysis. McGraw-Hill.
[3] Integrability and iterated integrals (in English). På kurs hemsidan.

3 Sammandrag av föreläsning 3
Tisdag 9/11/99

Integration av icke-kontinuerliga funktioner

I detta avsnitt, betraktar vi fortfarande bara funktioner på SBA rektangler som vi betecknar som vanligt med Δ.

DEFINITION : En begränsad delmängd $D \subset \mathbf{R}^2$ kallas för en *nollmängd* om, för varje $\epsilon > 0$, vi kan täcka D med ändliga många aexlparallella rektangler av total area högst ϵ.

ANMÄRKNING : Intuitivt, en nollmängd är en mängd av area noll.

Proposition. *Följande är nollmängder :*

(I) Grafen $y = f(x)$ till en kontinuerlig funktion f i en sluten intervall $a \leq x \leq b$.
(II) En C^1-kurva $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$.

BEVIS : (I) Jag gav samma bevis som i boken (Lemma 1, avsnitt 6.2).

(II) Detta resultat finns inte i boken. Idéen för beviset är att bevisa först att en C^1-kurva är *Lipschitz kontinuerlig* (se GLO, 1.6) och då att varje sådan funktion (på en sluten intervall) är en nollmängd.

ANMÄRKNING : Det är INTE sant att varje kontinuerlig kurva $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ är en nollmängd. Till exempel, det finns en kontinuerlig kurva $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ som går genom varje punkt i den enhetskvadraten (en så kallad 'space-filling curve').

Den stora satsen i detta avsnitt är

Sats 1. *Låt $f : \Delta \to \mathbf{R}$ vara en begränsad funktion, som är kontinuerlig i $\Delta \backslash N$ för någon nollmängd N. Då är f Riemann integrerbar över Δ.*

BEVIS : Det bevis som jag gav är ungefär lika med beviset av Lemma 2, avsnitt 6.2 i boken.

Integration över mer allmäna begränsade område

DEFINITION 1 : Låt D vara en begränsad område i $\mathbf{R}^2$, Δ en sluten, axelparallell rektangel som innehåller D och $f : D \to \mathbf{R}$ en funktion. Den *noll-utvidningen* av f till Δ är en funktion $f_\Delta : \Delta \to \mathbf{R}$ definieras som

$$f_\Delta(x,y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x,y), \text{ om } (x,y) \in D. \\ 0, \text{ om } (x,y) \notin D. \end{cases} . (10)$$

DEFINITION 2 : Låt D vara ett begränsad område i $\mathbf{R}^2$ och $f : D \to \mathbf{R}$. Vi säger att f är Riemann integrerbar över D om det finns en sluten, axelparallell rektangel $\Delta \supseteq D$ så att f_Δ är Riemann integrerbar över Δ.

Det följer omedelbart från Sats 1 att

Sats 2. *Om $f : D \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig, där D är en begränsad område så att ∂D är en nollmängd, då är f Riemann integrerbar över D.*

BEVIS : Välj Δ som innehåler D. Den funktion f_Δ är kontinuerlig i $\Delta \backslash \partial D$ och ∂D är en nollmängd. Nu tillämpa Sats 1.

För en viss typ av område, kan vi beräkna den Riemann integral av en kontinuerlig funktion via en itererad integral. Vi har

Sats 3. *Låt $a < b$ och α, β vara två kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ för alla $x \in [a,b]$. Låt*

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}. \tag{11}$$

Om $f : D \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig, då är f Riemann integrerbar över D och

$$\int\int_D f\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx. \tag{12}$$

.

BEVIS : Jag följde beviset i boken (Sats 6.3). Notera att en viktig del av beviset är att visa att den itererade integralen existerar.

Vi hoppade över avsnitt 6.3 mer eller mindre (det är varken viktigt eller mycket interessant) och gick fram till

Variabel bytning i beräkningen av dubbla-integraler

Vi gav lite berättigande (justification) men inte ett helt bevis (finns inte i boken heller) av följande sats :

Sats 4. *Låt $\Phi : (u, v) \to (x, y)$ vara en C^1 variabel bytning som avbildar det begränsade området D i det uv-planet bijektivt på det begränsade området D^* i det xy-planet. Om $f : D^* \to \mathbf{R}$ är Riemann integrerbar och vi betraktar f som en funktion på D, då är denna funktion också integrerbar och*

$$\int\int_{D^*} f(x, y)\, dxdy = \int\int_{D} f(x(u, v), y(u, v))\ |det(Jac[\Phi])|\ du\, dv. \qquad (13)$$

EXEMPEL 1 : Vi bytade till polära koordinator för att visa att klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ har volym $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Många fler exempel ska diskuteras i torsdagens lektion.

4 Sammandrag av föreläsning 4
Torsdag 11/11/99

Generaliserade dubbelintegraler

Idag vill vi utviga de tidigare begreppen för att kunna ge en mening till uttryck av formen $\int\int_D f\,dx\,dy$ där antingen ... eller

(1) D är obegränsad,
(2) D är inte sluten och f är obegränsad när man går mot ∂D,
(3) både (1) och (2).

Vi gör den bästa vi kan inom ramen för Riemann integration, som räcker för de situationer som vi kommer att möta i denna kurs, men vi håller i sinnen att man får en mycket mer klar och komplett bild med Lebesgue integration.

Motivering från envariabelanalys

Betrakta, t.ex. ett uttryck av formen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx. \tag{14}$$

Vi tänker på (14) som en förkortning till ett gränsvaärde, nämligen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx. \tag{15}$$

Alltså, är (14) meningsfull om f är Riemann integrerbar i varje sluten intervall $[0,n]$ och gränsvärdet i (15) existerar.

Om $f \geq 0$, då existerar gränsvärdet alltid, enligt Supremumaxiomet/Monoton Konvergens satsen eftersom följden i (15) är växande. Om den är begränsad, då konvergerar den till något positivt reellt tal ; annars, säger vi att integralen i (14) är lika med $+\infty$.

Å andra sidan, om integranden f inte är positiv, då är det ofta inte mögligt att ge en otvetydig (unambiguous) mening till (14). Även om följden i (15) konvergerar, till r säg, kan det vara lite meningslös att skriva $\int_0^\infty f(x)dx = r$. Betrakta, till exempel, funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ där

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad \text{för } n - 1 \leq x < n. \tag{16}$$

Enligt (15), skulle vi ha

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2. \tag{17}$$

Så vad är problemet med (17) ? Det finns två saker :

(1) Först, man vill tolka en integral av form (14) geometriskt som arean till något obegränsad område i $\mathbf{R}^2$ (arean under grafen $y = f(x)$), där arear under x-axeln betraktas negativa. Alltså, vill man tolka integralen, för en integrand med växlande tecken, som en differens av två arear, en av dem över x-axeln och den andra under axeln. Men för funktionen i (16), både dessa arear är oändliga, så att man kan inte prata om deras 'differens'. Vi ser att problemet kommer från att summan i (17) konvergerar INTE *absolut*. Detta orsaker också problem 2, nämligen -

(2) Kom ihåg följande sats från envariabelanalys (om ni inte har sett den förut, acceptera den !)

Sats. *Låt (a_n) vara en följd av reella tal.*

(a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar, men inte absolut, då för varje reellt tal s finns det en omskrivning (eng.: rearrangement) av serien som konvergerar till s.

(b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar absolut, då konvergerar varje omskrivning av serien till samma värde.

Från del (a) av denna sats ser vi att gränsvärdet till en serie som konvergerar, men inte absolut, är verkligen inte väldefinierad - det beror på ordningen av termerna. Men den geometriska tolkningen av en generaliserad integral borde vara oberoende av den ordningen av de vanliga integralerna i sin definition.

Så när kan man undvika dessa konstigheter och definiera generaliserade integraler av funktioner med växlande tecken ? Del (b) av ovanstående sats ger svaret : vi kan ge ett otvetydig värde till $\int_0^\infty f(x)\,dx$ när $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ är ändlig.

Alltså, när vi kommer till dubbelintegraler, ovanstående diskussion antyder att vi skulle inleda generaliserade integraler av formen $\int\int_D f dxdy$ i två steg :

Steg 1 : För positiva integrander $f \geq 0$.

Steg 2 : För funktioner f med växlande tecken som satisfierar $\int\int_D |f|\,dxdy < \infty$.

Nu gör vi just så.

Steg 1 : Positiva integrander

Definition 1 : Låt $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Antag att $f \geq 0$ och att f är integrerbar över varje kompakt, kvadrerbar delområde till D. Då definierar vi

$$\int\int_D f\,dxdy := \sup \int\int_K f\,dxdy, \tag{18}$$

där supremum tas över alla sådana kompakta delområde K. Om denna supremum är $+\infty$ då sätter vi $\int\int_D f\,dxdy = +\infty$.

Definition 2 : Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$. En *uttömmande svit* för D är en växande följd $K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$ av kompakta (kvadrerbara) delmängder till D så att $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = D$.

Följande proposition ger en metod för att beräkna generaliserade integraler. Beviset är tekniskt och vi hoppar över det, men intuitivt är propositionen ekvivalent med del (b) av satsen ovan. Man borde jämföra ekv. (19) med ekv. (15).

Proposition. *Låt $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vara positiv. Antag att f satisfierar villkoren i Definition 1. Låt $(K_n)_{n=1}^\infty$ vara en godtycklig uttömmande svit för D. Då är*

$$\int\int_D f\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\int_{K_n} f\,dxdy. \tag{19}$$

EXEMPEL : Betrakta $\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$. Vi väljer en uttömmande svit för $\mathbf{R}^2$ som består av slutna skivar av radie n ($n = 1, 2, ...$) med centrum i $(0, 0)$. Varje skiv-integral beräknas med polära koorinator och från (19) får vi att

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi. \tag{20}$$

Metoden som ges av Propositionen är inte så lätt att använda eftersom man måste välja en lämplig uttömmande svit i varje problem. Den bästa metoden vi har sett hittills för att beräkna dubbelintegraler är via itererade integraler. Lyckligtvis, kan man utviga dessa metoder till generaliserade integraler. Detta är en del av Fubini's sats. Teorin genomförs bäst inom ramen för Lebesgue integration, men oftast går allting bra med vanliga Riemann integraler. Vi hinner inte ge mer detaljer - den interesserade läsaren kan titta i Royden's eller Rudin's bok.

Alltså, om vi går tillbaka till exempel 1, kan vi också skriva integralen som

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\right)^2. \tag{21}$$

Från (20) och (21), får vi den berömde formulen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{22}$$

FLER EXEMPEL : Vi löste problem 6.34, 6.36, 6.38 i övningsboken. Notera att alla övningar i den där boken handlar om generaliserade integraler där integranden är positiv. I lektionen nästa gång, kommer vi att lösa en generliserad integral där integranden har växlande tecken. Se också Exempel 26, 27, 28 i PB, avsnitt 6.6.

STEG 2 : INTEGRANDER MED VÄXLANDE TECKEN

DEFINITION 3 : Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Vi definierar $L^1(D)$ att vara rummet av alla funktioner $f : D \to \mathbf{R}$ så att

(i) f är integrerbar över varje kompakt, kvadrerbar delområde till D.

(ii) $\int\int_D |f|\,dxdy < \infty$[4].

DEFINITION 4 : Låt $f : D \to \mathbf{R}$. Vi definierar funktionerna f_+ och f_- via

$$f_+(p) := \max\{f(p), 0\} \quad f_-(p) := -\min\{f(p), 0\}. \tag{23}$$

Notera att

(i) $f_+ \geq 0$ och $f_- \geq 0$.
(ii) $f = f_+ - f_-$.
(iii) $|f| = f_+ + f_-$.

Från (i) och (iii) följer det att om $f \in L^1(D)$, då är

$$\int\int_D |f|\,dxdy = \int\int_D f_+\,dxdy + \int\int_D f_-\,dxdy. \tag{24}$$

Alltså motiverar (ii) följande helt naturliga definition :

DEFINITION 5 : Låt $f \in L^1(D)$. Då definierar vi

$$\int\int_D f\,dxdy := \int\int_D f_+\,dxdy - \int\int_D f_-\,dxdy. \tag{25}$$

Alternativt, kan man skriva (25) i formen

$$\int\int_D f\,dxdy = \int\int_{D_+} f\,dxdy - \int\int_{D_-} (-f)\,dxdy, \tag{26}$$

där $D_\pm = \{p \in D : f(p) \gtrless 0\}$.

[4]Vi har inte gjort det, men det är inte svårt att bevisa att om f är integrerbar över det kompakta, kvadrerbara området K, så också är $|f|$.

5 Sammandrag av föreläsning 5
Tisdag 16/11/99

Vektoranalys

DEFINITION : Låt $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Ett *vektorfält* i Ω är en funktion $\vec{\boldsymbol{F}} : \Omega \to \mathbf{R}^n$.

Vi är interesserad, i stort sett, av vektorfält i planet ($n = 2$) och i rummet ($n = 3$) (notera att fallet $n = 1$ är envariabelanalys), där motiveringen för att studera dessa fält kommer från (klassisk) fysik. I modern fysik är man också interesserad av 4-dimensionella vektorfält, och inte bara i $\mathbf{R}^4$, men i en mer allmän typ av rum som kallas för *mångfält (eng.: manifolds)*.

OPERATIONER PÅ VEKTORFÄLT

DEFINITION : Låt $\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ vara ett 3-dimensionellt vektorfält. Vi definierar och betecknar den *divergensen* och *curl*[5] till $\vec{F}$ som följer

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{27}$$

$$\operatorname{curl} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]. \tag{28}$$

Notera att $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$ är en skalär, men $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}$ är en ny vektorfält.

En alternativ, formel (men lättare att komma ihåg !) beskrivning av 'div' och 'curl' ges av följande formuler

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) \tag{29}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x & \vec{\boldsymbol{e}}_y & \vec{\boldsymbol{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{30}$$

[5] På svenska säger man *rotationen* av $\vec{\boldsymbol{F}}$, men jag tycker inte om denna översättning. Termen 'curl' kommer från Maxwell. Jag har lagt på kurshemsidan en excerpt från ett brev som skrev Maxwell där han använder termen 'curl' för första gång.

I (29) och (30), betraktar vi $\vec{\nabla}$ som en 'formel vektor' med komponenter $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

För ett 2-dimensionellt vektorfält $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ i det xy-planet, formuler (27) och (28) för 'div' och 'curl' reducerar till

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{31}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{\boldsymbol{e}}_z. \tag{32}$$

Vektoranalys i planet

Vi är mest interesserad av integration av vektorfält längs kurvor i planet. Vi börjar med en precis definition av detta begrepp.

Definition : Låt Ω vara ett öppet område i planet och $\vec{\boldsymbol{F}} = (P, Q)$ ett kontinuerligt vektorfält i Ω. Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ vara en (parameteriserad) C^1-kurva i Ω där

$$\gamma(t) = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t)) \qquad a \leq t \leq b. \tag{33}$$

Den *kurvintegralen* av $\vec{\boldsymbol{F}}$ *längs* γ definieras och betecknas som

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_\gamma P dx + Q dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right] dt. \tag{34}$$

Motiveringen för att studera kurvintegraler kommer från fysik. Om $\vec{\boldsymbol{F}}$ är ett kraftfält och γ en kurva i planet, då mäter kvantiteten $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ det arbetet som görs när en partikel rör sig längs kurvan, från $\gamma(a)$ till $\gamma(b)$, under verkan av kraften $\vec{\boldsymbol{F}}$. Detta är lika med förändringen i partikelns enegri, dvs

$$W = \Delta E = \int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}. \tag{35}$$

Exempel : Om en partikel av mass m ligger på avtsånd $r > R$ från centrum av en sfäriskt symmetrisk kropp av mass M och radie R, då påverkas den av en gravitationell kraft

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -k\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{36}$$

där k är en universell positiv konstant och $\hat{\boldsymbol{r}}$ pekar ut från centrum. Om partikeln flyttats från kroppens yta till en höjd h över ytan, längs en rät linje γ som passar genom kroppens centrum, då gör vi arbetet

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_0^h -k\frac{mM}{(R+t)^2}\,dt = -kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right). \tag{37}$$

Från den fysiska tolkningen av en kurvintegral som en energi differens, följer det omedelbart att kraftfält har följande två egenskaper :

(i) För varje kurva γ, $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ är obereonde av den parameteriseringen för γ.

(ii) Om kurvan γ är *sluten*, då är $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$.

Det är lätt att bevisa (se boken, s. 289) att (i) stämmer faktiskt för alla kontinuerliga vektorfält. Men detsamma inte gäller (ii), som visar följande exempel :

EXEMPEL : Exempel 3, s. 290 i boken. Notera att den kurvintegral beräknas genom att dela upp γ i tre delar och att välja olika paramateriseringar för de tre delarna. Här använder vi att om $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$ (som betyder att den ändpunkten till γ_1 är den begynnelse punkten till γ_2 mm) då är

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{\gamma_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} + \ldots + \int_{\gamma_n} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}. \tag{38}$$

Notera att en sådan 'sammansatt' γ är inte nödvändigtvis C^1, men den är *styckvis* C^1. Ekvation (38) ger, faktiskt, en definition av kurvintegraler längs styckvis C^1-kurvor.

NOTATION : Om γ är sluten, betecknar vi ofta en kurvintegral längs γ som $\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$.

GREEN'S SATS

Ofta är det ganska svårt att beräkna kurvintegraler eftersom vi måste först välja en lämplig parameterisering för kurvan. Green's sats ger en metod för att beräkna vissa kurvintegraler genom att ersätta dem med vanliga dubbelintegraler. Den är ofta mycket användbar, men också av stor teoretisk interesse. Green's sats har två generaliseringar till $\mathbf{R}^3$, *Stokes' sats* och den *Divergens satsen*, som har viktiga fysiska tillämpningar. Dessa saker kommer vi att prata om senare.

DEFINITION : Låt D vara ett begränsad område i planet och antag att ∂D är en sluten, styckvis C^1-kurva. En *positiv orientation* för ∂D är en orientation där D ligger alltid till vänster.

Green's sats. *Låt $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ vara öppen och $\vec{\boldsymbol{F}} = (P, Q)$ ett C^1-vektorfält i Ω. Låt $D \subset \Omega$ vara kompakt, och antag att ∂D är en sluten, styckvis C^1-kurva. Om ∂D är positivt orienterad, då är*

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy. \tag{39}$$

BEVIS : Vi hoppade över det och ska göra det nästa gång. Vi följer (mer eller mindre) beviset i boken i alla fall. Notera här att den dubbelintegralen i (39) existerar ju eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga ($\vec{\boldsymbol{F}}$ är C^1) och ∂D är styckvis C^1, alltså en nollmängd.

EXEMPEL : Exempel 7, s.297 i boken. Detta exempel visar hur användbar Green's sats kan vara, till och med för att beräkna integraler längs kurvor som inte är slutna.

6 Sammandrag av föreläsning 6
Torsdag 18/11/99

BEVIS AV GREEN'S SATS : Vi följade idéen av 'beviset' i boken, som inte är ett komplett bevis eftersom satsen bevisas bara med en extra förutsättning, men jag känner inget bevis som undvikar de fula detaljerna som uppstår annars.

Jag tror att det är värd att bevara de viktiga stegen :

Steg 1 : Vi bevisar satsen under det extra villkoret att

(a) $D = D_1 \cup D_2 \cup ... D_n$, en ändlig union av delområde av formen

$$D_i = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i,\ \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}, \tag{40}$$

där α_i, β_i är kontinuerliga funktioner för $x \in [a_i, b_i]$ och $\alpha_i \leq \beta_i$

(b) också $D = D_1^* \cup D_2^* \cup ... \cup D_m^*$, en ändlig union av delområde av formen

$$D_j^* = \{c_j \leq y \leq d_j,\ \gamma_j(y) \leq x \leq \delta_j(y)\}, \tag{41}$$

där γ_j, δ_j är kontinuerliga i $[c_j, d_j]$ och $\gamma_j \leq \delta_j$.

Steg 2 : Om $\vec{\boldsymbol{F}} = (P, Q)$, då bevisar vi att, för varje D_i,

$$\oint_{\partial D_i} P\, dx = \int\int_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy, \tag{42}$$

genom att beräkna den dubbelintegralen som en itererad integral (med hjälp av Sats 6.4 i PB). På samma sätt, bevisar vi att för varje D_j^*,

$$\oint_{\partial D_j^*} Q\, dy = \int\int_{D_j^*} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy. \tag{43}$$

Steg 3 : Summera (42) över alla i, dvs

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial D_i} P\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{44}$$

Den högra leden av (44) är lika med $\int\int_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ från definitionen av dubbelintegraler. Den vänster leden är lika med $\oint_{\partial D} P\, dx$, eftersom alla kurvintegraler i inren kancellerar. Alltså, får vi att

$$\oint_{\partial D} P\, dx = \int\int_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{45}$$

På samma sätt, får vi att

$$\oint_{\partial D} Q\, dy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy. \tag{46}$$

(45) + (46) ger Green's sats.

Två alternativa formuleringar av Green's sats

I : *Cirkulation och 'curl'.*

Om D ligger i det xy-planet, då är $\vec{e}_z$ en enhets normal vektor till D i varje punkt. Denna vektor betecknas normalt med $\hat{n}$. Alltså, från (28) kan Green's sats skrivas i formen

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS \qquad (dS := dx\, dy). \tag{47}$$

Den vänster leden i (47) kallas för den *cirkulationen av* $\vec{F}$ kring D och förklarar termen *curl*. Fältet $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ mäter den *lokala cirkulationen* av vektofältet $\vec{F}$. Denna formulering av Green's sats generaliserar till *Stokes' sats* i $\mathbf{R}^3$, som vi kommer att diskutera nästa vecka.

II : *Flöd och divergens.*

I en kurvintegral $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tar vi den skalära produkten i varje punkt längs ∂D av $\vec{F}$ och $\hat{t}\, dr$, där $\hat{t}$ är en enhets vektor tangent till kurvan i den positiva riktningen. I rättvinkliga koordinator $\hat{t}\, dr = (dx, dy)$ så att, om $\vec{F} = (P, Q)$ som vanligt, den kurvintegralen blir $\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy$.

Nu betraktar vi i stället den kurvintegralen som fås när man tar i varje punkt den skalära produkten av $\vec{F}$ med $\hat{n}\, dr$, där $\hat{n}$ är en enhets vektor NORMAL till kurvan och som pekar ut från D. I rättvinkliga koordinator är $\vec{n}\, dr = (dy, -dx)$ så att vi får den kurvintegralen $\oint_{\partial D} Q\, dy - P\, dx$.

Green's sats antyder att denna kurvintegral är lika med den dubbelintegralen $\int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\,dx\,dy$. Från (27) kan vi nu skriva att

$$\oint_{\partial D} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\,dr = \int\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\,dx\,dy. \tag{48}$$

Den vänster leden i (48) kallas för *flödet* ut av D. I tillämpningar, $\vec{\boldsymbol{F}}$ representerar t.ex. en material strömning. Från mass konservering, finns det ett nett flöd ut av D endast om material produceras i D. Alltså, mäter $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$ den *lokala produktionen* av material i D.

Denna formulering av Green's sats generaliserar till den så kallade *Divergens satsen (Gauss' lag)* i $\mathbf{R}^3$.

Konservativa vektorfält

DEFINITION 1 : Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara ett kontinuerlig vektorfält i det öppna området Ω i det xy-planet. $\vec{\boldsymbol{F}}$ kallas för *konservativt* om $\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten C^1-kurva γ i Ω.

Notera följande alternativ definition

DEFINITION 1$'$: Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara ett kontinuerlig vektorfält i det öppna området Ω i det xy-planet. $\vec{\boldsymbol{F}}$ kallas för *konservativt* om, för varje två punkter $p, q \in \Omega$ och varje två C^1-kurvor γ_1, γ_2 i Ω från p till q, $\int_{\gamma_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{r}$.

Vi har sett från våra övningar att de flesta vektorfält inte är konservativa. Å andra sidan, är konservativa vektorfält mycket viktiga i fysik. Om $\vec{\boldsymbol{F}}$ är ett kraftfält då är $\vec{\boldsymbol{F}}$ konservativ när som helst den *energi konserverings principen (eng.: principle of conservation of energy)* gäller.

Nu bevisar vi två satser som karakteriserar konservativa vektorfält. Den första satsen gäller alla kontinuerliga fält i bågvis sammanhängande område. Den andra satsen är lite mer restriktiv : den gäller C^1-fält i enkelt sammanhängande (definition nere) område.

Sats 1. *Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara en kontinuerlig vektorfält i det öppna, bågvis sammanhängande området Ω. Då är $\vec{\boldsymbol{F}}$ konservativt om och endast om det finns en C^1-funktion $U : \Omega \to \mathbf{R}$ så att $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla} U$.*

BEVIS : gavs i föreläsningen. Se också satser 9.2 och 9.3 i PB.

Funktionen U i Sats 1 kallas för en *potential funktion* till $\vec{\boldsymbol{F}}$.

ANMÄRKNING : Om U, V är två potential funktioner till $\vec{\boldsymbol{F}}$ då följer det från Sats 2.5 i PB att $U = V + C$ för någon reell konstant C.

Innan vi skriver ner Sats 2, behöver vi en definition till. Kom ihåg att den *Jordan curve theorem* antyder att komplementet till varje enkel, sluten, kontinuerlig kurva γ i planet består av precis två öppna sammanhängande område, som kallas för *insidan* och *utsidan* till γ.

DEFINITION 2 : Den bågvis sammanhängande delmängden Ω till $\mathbf{R}^2$ kallas för *enkelt sammanhängande* om insidan till varje enkel, sluten, kontinuerlig kurva i Ω ligger helt i Ω.

ANMÄRKNING : Intuitivt, det b.s.h. området Ω är enk. sam. om det har inga hål !

Sats 2. *(i) Låt $\vec{\boldsymbol{F}} = (P, Q)$ vara ett C^1-vektorfält i det öppna, enkelt sammanhängande området Ω i det xy-planet. Då är $\vec{\boldsymbol{F}}$ konservativt om och endast om*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{49}$$

(ii) Om Ω inte är enk. sam., (49) är fortfarande ett nödvändigt villkor för $\vec{\boldsymbol{F}}$ att vara konservativ.

EXEMPEL : Fältet $\vec{\boldsymbol{B}}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, som representerar det magnetiska fältet kring en oändlig rak ledare genomfluten av en konstant ström, visar att Sats 2 kan misslyckas (fail ?) om Ω inte är enkelt sammanhängande. Denna $\vec{\boldsymbol{B}}$ är definierad och C^1 i $\mathbf{R}^2 \backslash \{\vec{0}\}$, som inte är enk. sam.. Man kontrollerar lätt att $\vec{\boldsymbol{B}}$ uppfyller (49). Men $\vec{\boldsymbol{B}}$ är inte konservativ eftersom $\oint_{C(0,r)} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ för alla $r > 0$.

Denna (matematisk) olikhet mellan det elektriska fältet $\vec{\boldsymbol{E}}$ och det magnetiska fältet $\vec{\boldsymbol{B}}$ ses också i deras förhållande med de motsvarande elektriska och magnetiska krafterna. Kraften på en stationär punktladdning q är $q\vec{\boldsymbol{E}}$. Alltså är $\vec{\boldsymbol{E}}$ konservativ om vi glömmer magnetiska fält - det finns en så kallad *elektrisk potential.*

Men den magnetiska kraften på en laddning q som rör sig med hastighet $\vec{v}$ i ett magnetiskt fält $\vec{\boldsymbol{B}}$ är $q\vec{v} \times \vec{\boldsymbol{B}}$.

Alltså, den totala *elektromagnetiska* kraften på en rörande laddning q är

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e.m.}} = q\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{v} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right). \tag{50}$$

Maxwell's ekvationer (som följer från Stokes' och Gauss' sats i rummet) beskriver precist den interaktionen mellan elektriska och magnetiska fält, och antyder existensen av så kallade *elektromagnetiska vågar* vars hastighet (i vakuum) är en universell konstant ($c \approx 2.998 \times 10^8$ ms^{-1}). Detta ledar till Speciell Relativitet. Vi ska prata mer om Maxwell's ekvationer efter kapitel 10 i PB.

7 Sammandrag av föreläsning 7 Torsdag 23/11/99

Vektoranalys i rummet

Låt S vara en yta i rummet. Låt $f(x,y,z)$ vara en kontinuerlig funktion på ytan. Vi vill ge en precis mening till uttrycket

$$\int\int_S f(x,y,z)\, dS. \tag{51}$$

Kvantiteten dS kallas för ett *areaelement* som generaliserar en infinitesimal rektangel i planet. Dvs, om S ligger i ett plan, säg det xy-planet, då är $dS = dx\,dy$ och (51) blir en vanlig dubbelintegral $\int\int_S f(x,y)\, dx\,dy$. Här tänker vi på x, y som parametrer till ytan och på dS som arean av den infinitesimal rektangeln med vertices i $(x,y), (x+dx,y), (x+dx,y+dy), (x,y+dy)$. För en godtycklig C^1-yta i $\mathbf{R}^3$ har vi följande definition :

DEFINITION : Låt S vara en C^1-yta i rummet med en parameterisering

$$S = \{\vec{\boldsymbol{r}}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : (s,t) \in D \subseteq \mathbf{R}^2\}. \tag{52}$$

Det *areaelementet* på ytan i punkten $\vec{\boldsymbol{r}}(s,t)$ är arean av det infinitesimal parallellogrammet med vertices i

$$\vec{\boldsymbol{r}}(s,t),\ \vec{\boldsymbol{r}}(s+ds,t),\ \vec{\boldsymbol{r}}(s+ds,t+dt),\ \vec{\boldsymbol{r}}(s,t+dt).$$

Notera att längderna av parallellogrammets sidor är $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial s}ds$ och $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial t}dt$. Alltså, från den formul för arean till ett parallellogram får vi att

$$\text{Areaelement} = dS = \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial s}ds \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial t}dt\right| = \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial t}\right|\ ds\,dt. \tag{53}$$

Nu är vi beredd att ge en precis definition av integralen i (51).

DEFINITION : Låt S vara en C^1-yta i rummet med en parameterisering som i (52). Låt $f(x,y,z)$ vara en funktion på ytan. Då definierar vi den *integralen av f över S* via formulen

$$\int\int_S f\,dS \stackrel{\text{def}}{=} \int\int_D f(\vec{\boldsymbol{r}}(s,t)) \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial s}ds \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial t}dt\right| = \int\int_D f(\vec{\boldsymbol{r}}(s,t) \left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial t}\right| dsdt, \tag{54}$$

om den högra dubbelintegralen existerar.

EXEMPEL : Vi beräknade arean av en sfär av radie R. Arean av en yta S är $\int\int_S dS$. För sfären, användade vi parameteriseringen

$$S = \{\vec{\boldsymbol{r}}(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi) : 0 \leq \phi \leq pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}. \tag{55}$$

En explicit beräkning visar att det areaelementet är $dS = R^2 \sin\phi \; d\phi \, d\theta$. Alltså, blir integralen $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi \; d\phi \, d\theta = 4\pi R^2$.

FLÖD GENOM EN YTA : DIVERGENS SATS

Det finns en viss typ av ytintegral som vi är särskilt interesserad av. Kom ihåg att i 2-dimensionell vektoranalys, möter vi integraler av formen

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{t} \, dr \quad \text{och} \quad \int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n} \, dr, \tag{56}$$

där $\vec{\boldsymbol{F}}$ är ett kontinuerligt 2-dimensionellt vektorfält, γ är en orienterad C^1-kurva, vektorerna $\hat{t}, \hat{n}$ är respektivt tangent och normal till kurvan, och dr är ett längd element längs kurvan.

I 3-dimensionell vektoranalys, betraktar vi (naturligt !) 3-dimensionella fält $\vec{\boldsymbol{F}}$, och vi vill ersätta kurvan γ med en C^1-yta S och längd elementet dr med det motsvarande area elementet dS för att få en ytintegral. När kan vi göra detta meningsfullt ?

Först notera att kurvintegralen $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{t} \, dr$ har ingen meningsfull 'yta analog' eftersom det finns inte en unik rikning $\hat{t}$ tangent till en yta i en punkt - det finns faktist ett helt plan tangent till ytan.

Å andra sidan finns det ju ett unik par av anti-parallella riktningar normal till ytan i varje punkt. Alltså, om vi väljer en av dessa riktningar i varje punkt, blir yttrycket $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}$ meningsfull. Men för att kunna integrera det, måste uttrycket vara kontinuerligt, dvs måste vi kunna välja riktningen $\hat{n}$ kontinuerligt på hela ytan. Detta behöv motiverar följande definition :

DEFINITION : Den C^1-ytan S kallas för *orienterbar* om det finns ett kontinuerligt val av normalvektoren på hela ytan. Om S är orienterbar, då består en *orientering* av S av ett sådant kontinuerligt val.

Det finns icke-orienterbara ytor : det klassiska exemplet är ett *Möbius band* (se kurshemsidan). Intuitivt, en yta är orienterbar om den har två sidor. I detta fall, får man en orientering av ytan genom att välja en sida och att välja den normalriktningen i varje punkt som pekar mot denna sida.

De flesta vanliga ytor är 2-sidade, alltså orienterbara. Ett viktigt speciellt fall är när ytan är randen till något kompakt område V i $\mathbf{R}^3$. Då representerar V en sida och resten av $\mathbf{R}^3$ den andra sidan. Denna är den situation som betraktas i följande viktiga sats :

Sats (Gauss' divergens sats). *Låt den C^1-ytan S begränsa det kompakta området V i $\mathbf{R}^3$. Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält som är C^1 i något öppet område Ω som innehåller V. Då har vi att*

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV, \tag{57}$$

om S är orienterad så att $\hat{n}$ pekar ut från V i varje punkt.

Bevis : Gavs i föreläsningen. Notera att (57) är en direkt generalisering av versionen (48) av Green's sats i planet. Alltså är det ingen överraskning att de bevisen av de två satserna är mycket liknande. Vi bevisar den Divergens satsen, som i boken, bara med det extra villkoret att V kan delas upp i ändliga många delområde V_i, W_j, X_k av formen respektivt

$$V_i = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_i,\ \alpha_i(x,y) \leq z \leq \beta_i(x,y)\} \tag{58}$$

$$W_j = \{(x,y,z) : (x,z) \in E_j,\ \gamma_j(x,z) \leq y \leq \delta_j(x,z)\} \tag{59}$$

$$X_k = \{(x,y,z) : (y,z) \in F_k,\ \epsilon_k(y,z) \leq x \leq \phi_k(y,z)\}, \tag{60}$$

där alla $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j, \delta_j, \epsilon_k, \phi_k$ är kontinuerliga och Green's sats gäller alla två dimensionella kompakta område D_i, E_j, F_k.

Om $\vec{F} = (P, Q, R)$ då kan vi bevisa direkt, genom att beräkna lämpliga itererade integraler att, respektivt,

$$\int\int_{\partial V_i} (0,0,R) \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV \tag{61}$$

$$\int\int_{\partial W_j} (0,Q,0) \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{W_j} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV \tag{62}$$

$$\int\int_{\partial X_k} (P,0,0) \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{X_k} \frac{\partial P}{\partial x}\, dV. \tag{63}$$

När vi tar summorna av de högra lederna i (61), (62) och (63) får vi den högra leden av (57) enligt definitionen av trippelintegraler. Detsamma gäller de vänster lederna på grund av att alla ytintegraler i inren till V kancellerar om varje delområde är orienterad med $\hat{n}$ pekande ut.

ANMÄRKNING : Den vänster leden i (57) tolkas som *flödet* av $\vec{\boldsymbol{F}}$ ut av V. Om $\vec{\boldsymbol{F}}$ representerar någon material strömning, då säger (57) att $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$ mäter den *lokala produktionen* av materialen.

EXEMPEL : *Gauss' lag* i electrostatik (ett fysisk lag !) säger (i vakuum) att, med S, V och $\hat{n}$ som i ovanstående sats,

$$\int\int_S \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{n}\, dS = \text{ total laddning i området } V, \tag{64}$$

där $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ är en universell konstant. Detta lag är faktiskt ekvivalent med det mer vanliga *Coulomb's laget.*

Om laddningen i V är distribuerad så att den lokala laddnings densiteten ges av $\rho = \rho(x, y, z)$, då säger Gauss' lag att

$$\int\int_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \rho\, dV. \tag{65}$$

Men (antagande att fältet är C^1, som betyder fysiskt att det finns inga idealiserade punkt laddningar) den Divergens satsen säger att

$$\int\int_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\, dV. \tag{66}$$

Då följer det från Lemman nere att

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0, \tag{67}$$

som är en av Maxwell's ekvationer.

Lemma. *Låt $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ vara kontinuerlig, där Ω är öppen, och antag att $\int_V f\, dV = 0$ för varje kompakt delområde V till Ω. Då är $f \equiv 0$ överallt i Ω.*

BEVIS : Antag att $f(P) \neq 0$, säg $f(P) > 0$. Ty f är kontinuerlig och Ω öppen, finns det $r > 0$ så att $B[P, r] \subseteq \Omega$ och $f > 0$ överallt i $B[P, r]$. Då är $\int_{B[P,r]} f\, dV > 0$, en motsägelse.

8 Sammandrag av föreläsning 8 Torsdag 25/11/99

Stokes' sats

Vi vill generalisera version (47) av Green's sats. Betrakta en gång till en parameteriserad yta i rummet,

$$S = \{\vec{\boldsymbol{r}}(s,t) : (s,t) \in D \subseteq \mathbf{R}^2\}.$$

Om D är kompakt med en styckvis C^1-rand ∂D, då är $\{\vec{\boldsymbol{r}}(s,t) : (s,t) \in \partial D\}$ en sluten, C^1-kurva i rummet som 'begränsar' S. Vi betecknar denna kurva som ∂S. Nu kan vi framställa Stokes' sats :

Stoke's sats.[6] *Låt ∂S vara en sluten, styckvis C^1-kurva som begränsar den C^1-ytan S i rummet. Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara ett C^1-vektorfält i något öppet område Ω som innehåler S. Då är*

$$\oint_{\partial S} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{t}\, dr = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{r}}\right) \cdot \hat{n}\, dS, \tag{68}$$

där S och ∂S är orienterade så att $\hat{n} \times \hat{t}$ pekar in mot S.

ANMAÄRKNING : I ord, ∂S är orienterad så att S ligger till vänster av ∂S. Kom ihåg att reglerna för rikningar av vektor produkter ges av den så kallade *högra hands regeln* som är ekvivalent med de tre formulerna

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{e}}_z, \quad \vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{e}}_x, \quad \vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{e}}_y. \tag{69}$$

BEVIS : (Liksom i boken). Vi bevisar satsen under det extra villkoret att S kan delas upp i ändliga många kompakta C^2-*funktionsytor* $S_1, ..., S_n$, dvs varje S_i har formen

$$S_i = \{(x, y, f_i(x,y)) : (x,y) \in D_i \subseteq \mathbf{R}^2\}, \tag{70}$$

[6]Stokes' sats bevisades inte faktiskt av Stokes. Det var den fysikern Kelvin som först skrev ner satsen i ett privat brev till Stokes i 1850. Satsen visade sig offentligt den första gången som ett tentamensproblem av Stokes på Cambridge i 1854.

där f_i är en C^2-funktion i något öppet delmängd till $\mathbf{R}^2$ som innehåller det kompakta området D_i, som har dessutom en styckvis-C^1 rand orienterad liksom ∂S_i.

Vi bevisar direkt, med hjälp av Green's sats (de beräkningarna är ganska långa), att för varje i

$$\int_{\partial S_i} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{t}\, dr = \int \int_{S_i} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \hat{n}\, dS. \tag{71}$$

När vi summerar över alla S_i, då kancellerar alla kurvintegraler i inren till S och får vi (68).

Konservativa fält och potentialer

Den definition av begreppet 'konservativt' i $\mathbf{R}^3$ är detsamma som i $\mathbf{R}^2$.

Definition 1 : Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i det öppna området Ω. $\vec{\boldsymbol{F}}$ kallas för *konservativt* om $\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ för varje sluten, C^1-kurva γ i Ω.

Nästa sats generaliserar Sats 1, föreläsning 6 och har exakt samma bevis :

Sats 1. *Det kontinuerliga $\vec{\boldsymbol{F}}$ är konservativt i Ω om och endast om det finns en C^1-funktion $U(x,y,z)$ i Ω så att $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla} U$.*

Funktionen U kallas för en *potentialfunktion* till $\vec{\boldsymbol{F}}$ som vanligt.

Nu ger vi en generalisering av Sats 2, föreläsning 6 som används om man är bara interesserad av om fältet är konservativt eller ej, och inte av att ange en explicit potentialfunktion. Först, måste vi utviga definitionen av enkelt sammanhängandehet. Vi ger två definitioner :

Definition 2 (intuitiv, gäller bara $\mathbf{R}^3$) : En delmängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ kallas för *enkelt sammanhängande* om Ω är bågvis s.h. och varje sluten kurva i Ω begränsar någon kontinuerlig yta som ligger helt i Ω.

OBS! Medan (whereas) $\mathbf{R}^2$ minus en punkt är inte enk. s.h., $\mathbf{R}^3$ minus en punkt ÄR enk.. s.h. enligt denna definition. Ett exempel av en bågvis s.h., icke-enk. s.h. delmängd till $\mathbf{R}^3$ är komplementet av en rät linje. En kontinuerlig yta som begränsar en kurva kring linjen måste möta linjen.

Jag tror att det är värd att ge en precis definition av enkelt sammanhängandehet (definition 4 nere) som kan utvigas till alla topologiska rum. Först behöver vi ett begrepp till :

DEFINITION 3 : Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vara en kurva. En *kontinuerlig deformation* av γ är en kontinuerlig funktion $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^n$ så att

(i) $F(s, 0) = \gamma(s)$, för $a \leq s \leq b$.
(ii) $F(a, t) = \gamma(a)$ för $0 \leq t \leq 1$.
(iii) $F(b, t) = \gamma(b)$ för $0 \leq t \leq 1$.

Då har vi

DEFINITION 4 : En delmängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ kallas för *enkelt sammanhängande* om Ω är bågvis s.h. och varje sluten kurva i Ω kan deformeras kontinuerligt, i Ω, till en punkt[7].

Nu kan vi generalisera Sats 2, föreläsning 6 :

Sats 2. (i) *Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara ett C^1-vektorfält i det öppna, enkelt s.h. området $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$. Då är $\vec{\boldsymbol{F}}$ konservativt i Ω om och endast om*

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} \equiv \vec{0} \tag{72}$$

överallt i Ω.

(ii) Om Ω inte är enkelt s.h., då är (72) fortfarande ett nödvändigt villkor för ett konservativt C^1-fält.

[7] I allmäna område Ω fixerar vi en baspunkt P och betraktar alla slutna kurvor med begynnelse punkt P. Två sådana kurvor γ_1, γ_2 sägs vara ekvivalenta om γ_1 kan deformeras till γ_2 i Ω. Man kontrollerar lätt att detta är en ekvivalens relation. De ekvivalensa klasserna utgör en grupp (mulitplikation är sammansattning - måste kontollera att den är väl-definierad - inversion svarar mot orientations växling, och det enhets elementet är den konstanta kurvan vid P) som kallas för den *fondamentala gruppen av Ω med avseende på P* och betecknas $\pi_1(\Omega, P)$. Om Ω är bågvis s.h., då är $\pi_1(\Omega, P)$ oberoende av P och kallas helt enkelt för den *fondamentala gruppen* av Ω och betecknas $\pi_1(\Omega)$. Till exempel, om $\Omega = \mathbf{R}^3 -$ en rät linje, då är $\pi_1(\Omega) \cong \mathbf{Z}$.

Bevis : Bevis av (ii) använder ekv. (73) nere (se också övning 13(a) på stencilen). Bevis av (i) använder Stokes' sats.

Relationer mellan curl, div och grad

Det finns många formuler som relaterar dessa tre 'vektor operatorer'. Här är en kort lista, som togs från [1]. Vektorfält betecknas med $\vec{\boldsymbol{F}}$ och $\vec{\boldsymbol{G}}$ och skalärfält med ϕ :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0} \tag{73}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) = 0 \tag{74}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\right) - \Delta\vec{\boldsymbol{F}} \tag{75}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) = \vec{\boldsymbol{G}} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) - \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) \tag{76}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\phi\vec{\boldsymbol{F}}\right) = \phi\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\right) + \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) \tag{77}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\phi\vec{\boldsymbol{F}}\right) = \phi\left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) + \left(\vec{\nabla}\phi\right) \times \vec{\boldsymbol{F}} \tag{78}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{G}}\right) = \vec{\boldsymbol{F}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) + \left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{G}} + \vec{\boldsymbol{G}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) + \left(\vec{\boldsymbol{G}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{F}} \tag{79}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) = \left(\vec{\boldsymbol{G}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{F}} - \left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{G}} - \vec{\boldsymbol{G}}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\right) + \vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) \tag{80}$$

Anmärkningar : Sats 2 ovan ger en motsats till (73), åtminstone i enkelt s.h. område. Det finns en liknande motsats till (74), nämligen om det vektorfältet $\vec{\boldsymbol{B}}$ satisfierar $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$, då finns det (under vissa villkor) ett vektorfält $\vec{\boldsymbol{A}}$ så att $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}$. Fältet $\vec{\boldsymbol{A}}$ i så fall kallas för en *vektorpotential* till $\vec{\boldsymbol{B}}$. Dessa uppstår i elektromagnetik eftersom det magnetiska fältet är alltid divergens-fri (se nästa föreläsning).

Ekv. (75) är också viktig. Den används t.ex. för att deducera den elektromagnetiska vågekvationen från Maxwell's ekvationer (se nästa föreläsning + övning 17 på inlämningsuppgift 1). Här kallas operatoren Δ för den *Laplacian* och ges av

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{81}$$

Ekv. (76) finns i PB utan bevis. Både (77) och (78) kan tolkas som generaliseringar av Leibniz' regeln för differentiation av produkter. OK, både (79) och (80) är lite svårare att tolka !

REFERENS

[1] E.G. CULLWICK, Electromagnetism and Relativity, Longmans (London) 1957.

9 Sammandrag av föreläsning 9 Tisdag 30/11/99

Den material som diskuterades i denna föreläsning är supplementär och behövs ej för tentan. Alltså, om du är interesserad, gå till den supplementära kursmaterialen på hemsidan.

10 Sammandrag av föreläsning 10 Torsdag 2/12/99

Serier

Det eventuella målet av resten av kursen är att undersöka och skapa någon slags teori för reellvärda funktioner av EN reell variabel som är definierade genom oändliga summor av andra sådana funktioner. Dvs, kommer vi att undersöka funktioner $f(x)$ av formen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{82}$$

för någon följd av funktioner $f_1, f_2, \ldots$. Vi studerar sådana saker eftersom

(i) från en synpunkt, är det ofta passande, i matematik och dess tillämpningar, att försöka representera en funktion i termer av enkla/elementära funktioner med hjälp av en oändlig serie. Till exempel, ni har redan mött i envariabel-analys den MacLaurin/Taylor utvecklingen av en C^∞ funktion. Här, de elementära funktionerna i serien är bara potenser av x. Senare, kommer vi att studera en annan typ av serie representation, den så kallade *Fourier expansion* av en periodisk, kontinuerlig funktion. Här, de elementära funktionerna i serien är $\cos(nx)$ och $\sin(nx)$. Fourier serier har många viktiga tillämpningar, särskilt i elektroteknik.

(ii) från en annan synpunkt, är den en kraftfull metod för att skapa nya funktioner.

I matematisk analys, om vi tar synpunkt (ii) då är vi mest interesserade av vilka 'sköna analytiska egenskaper' av de termerna i serien 'are inherited by' deras summa. Typiska frågor som ställs är, t.ex.:

(a) Om alla f_i är C^k, när gäller detsamma deras summa ?

(b) när kan vi differentiera/integrera summan termvis ?

Vi kommer att bevisa satser som ger ganska bra svar till dessa frågor.

Om man tar synpunkt (i), då är man interesserad av en till och med mer fondamental fråga, nämligen : när är den serie representationen av en funktion 'korrekt' ?

För att bättre förklara vad jag menar, tag t.ex. den Taylor utvecklingen av en C^∞-funktion. Konstiga saker kan hända -

(a) I del 1 av kursen, träffade vi funktionen $f(x) = e^{-1/x^2}$ och såg att den MacLaurin utvecklingen av denna funktion är identiskt noll. Så här har vi en MacLaurin utveckling som konvergerar till ett fel svar.

(b) Till och med konstigare, finns det en sats av Borel som säger att varje oändlig potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är den MacLaurin utvecklingen av någon C^∞-funktion. Alltså, finns det sköna, snygga C^∞-funktioner vars MacLaurin utvecklingar 'blow up like balloons' och konvergerar inte alls !

Från ovanstående diskussion ser vi att det fondamentala problemet i detta ämne är konvergens av oändliga serier av funktioner. Innan vi kan analysera detta problem för serier av funktioner måste vi dock ha en bra uppfattning av det analogiska problemet för serier av vanliga tal, eftersom en serie av funktioner $f_n(x)$ ger en serie av reella tal för varje värde av x.

Serier av reella tal

En stor del av denna material har ni redan sett i envariabelanalys, så går vi ganska snabbt. Först och framst, kom ihåg den definition av konvergens av en FÖLJD av reella tal.

DEFINITION 1(a) : Den följden (x_n) av reella tal *konvergerar* till det reella talet L om, för varje $\epsilon > 0$ finns det $N_\epsilon >> 0$ så att

$$n > N_\epsilon \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon. \tag{83}$$

DEFINITION 1(b) : Den följden (x_n) *går mot* $+\infty$ om, för varje $R > 0$ finns det $N_R >> 0$ så att

$$n > N_R \Rightarrow x_n > R. \tag{84}$$

DEFINITION 1(c) : Den följden (x_n) *går mot* $-\infty$ om, för varje $R > 0$ finns det $N_R >> 0$ så att

$$n > N_R \Rightarrow x_n < -R. \tag{85}$$

Alltså, för en allmän följd (x_n) av reella tal finns det 4 möjligheter :

(i) $x_n \to L$ för något reellt tal L.
(ii) $x_n \to +\infty$.
(iii) $x_n \to -\infty$.
(iv) x_n går ingenstans/'oscillerar'.

Det begrepp av konvergens för serier definieras i termer av det motsvarande begreppet för följder. Vi har

Definition 2 : Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en oändlig följd av reella tal. Sätt $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Om följden (S_n) konvergerar till det reella talet L då skriver vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L, \tag{86}$$

och säger att serien *konvergerar*. Om följden (S_n) inte konvergerar till ett reellt tal, då säger vi att serien *divergerar*. Men om $S_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) då skriver vi fortfarande att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ (resp. } -\infty). \tag{87}$$

Den centrala problemet i studium av serier av reella tal är följande, i två delar :

Del 1 : För en given följd (a_n) av tal, bestäm om $\sum a_n$ konvergerar.

Del 2 : Om serien konvergerar, bestäm dess värde.

Jag hoppas att det inte är en överraskning för er att det finns ingen allmän lösning till del 1[8]. Del 2 är oftast hopplöst utan numeriska metoder. Det finns några serier vars summor kan skrivas ner med en explicit formul, och några isolerade imponerande resultat liksom Eulers' berömd formul

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{88}$$

[8] Det är en icke-svår övning i matematisk logik att bevisa att det finns inget datorprogram som tar som input en godtycklig följd (a_n) av reella tal, och ger som output 'JA' om $\sum a_n$ konvergerar och 'NEJ' annars.

men i allmänhet måste vi nöja oss med att approximera seriens värde bättre och bättre genom att summera mer och mer termer (med hjälp av en dator).

Men här finns det fortfarande en central teoretisk komponent : när man gör en numerisk beräkning, måste man veta på förhand hur snabbt serien konvergerar, så att man vet hur bra en approximation man får genom att summera ett visst antal termer.

Det finna också tillämpningar där man jobbar med divergenta serier som går mot $\pm\infty$ och är interesserad av hur snabbt serien växer. Alltså har vi en lite mer ambitiös, men mycket mer realistisk, reformulering av del 2, nämligen :

DEL $2'$: Om en serie konvergerar, bestäm hur snabbt den gör så. Om serien går mot $\pm\infty$, bestäm hur snabbt den växer.

Vår strategi i studium av serier är följande :

STEG 1 : Skriva ner några typer av konvergenta serier vars exakta värde kan lätt beräknas genom t.ex. att skaffa en explicit formul, och några andra divergenta serier vars divergens kan lätt bevisas.

STEG 2 : Försöka jämföra andra serier med dessa. Här hoppas du också att dina jämförelser kommer att ge bra information med hänsyn till DEL $2'$ ovan.

STEG 3 : I det värsta fallet, formulera allmäna nödvändiga/tillräckliga villkor för konvergens/divergens av vissa typer av serier som ger ingen information med hänsyn till DEL $2'$.

STEG 1 : NÅGRA GRUNDLÄGGANDE SERIER

A. Den så kallade *Harmoniska serien.* Vi vet att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{89}$$

Notera att detta resultat kan bevisas utan även kalkyl - alltså, är det förnuftigt att betrakta det som ett fondamentalt resultat.

Notera också den nästan trivialla propositionen (som tillhör Steg 3, men är så lätt att vi kan framställa den här) att om $\sum a_n$ konvergerar då måste

$a_n \to 0$. Den harmoniska serien är det standarda exemplet som visar att den motsats av denna proposition stämmer inte.

B. Geometriska serier. Kom ihåg att

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}. \tag{90}$$

Vi får direkt den oändliga versionen av detta resultat, nämligen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, \text{ om } |z| < 1. \\ \text{divergent, annars.} \end{cases} \tag{91}$$

C. Teleskopande serier. Låt (b_n) vara en följd av tal och inleda en ny följd (a_n) genom

$$a_n := b_n - b_{n+1}. \tag{92}$$

Serien $\sum a_n$ kallas för *teleskopande*. Om $b_n \to L$ (resp. $+\infty, -\infty$, ingenstans), då har vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L \text{ (resp. } -\infty, +\infty, \text{ ingenting).} \tag{93}$$

EXEMPEL : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Vi får detta genom att skriva $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

STEG 2 : JÄMFÖRELSER

De enklaste jämförelsekriteria handlar om serier med *positiva* termer. Den Monoton Konvergens satsen antyder att en sådan serie antingen konvergerar eller går mot $+\infty$. Alltså har serien alltid 'ett värde'. Idag kommer vi ihåg, och bevisar inte, två satser som ni har redan sett i envariabelanalys. Bevis finns i GLO, s. 61-64.

Sats 1 (allmän jämförelsekriterium). *Låt $(a_n), (b_n)$ vara följder av positiva tal.*

Version 1 : (i) Om $a_n \leq b_n$ för alla n och $\sum b_n$ konvergerar, då konvergerar $\sum a_n$.

(ii) Om $a_n \leq b_n$ *för alla* n *och* $\sum a_n$ *divergerar, då divergerar* $\sum b_n$.

Version 2 : (i) Om $a_n \leq b_n$ *för alla* $n >> 0$ *och* $\sum b_n$ *konvergerar, då konvergerar* $\sum a_n$.

(ii) Om $a_n \leq b_n$ *för alla* $n >> 0$ *och* $\sum a_n$ *divergerar, då divergerar* $\sum b_n$.

Version 3 : Om $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *existerar och är ett icke-noll reellt tal, då konvergerar* $\sum a_n$ *omm* $\sum b_n$ *konvergerar.*

ANMÄRKNING : Notera att detta allmänt kriterium är mycket användbart för både DEL 1 och DEL $2'$.

EXEMPEL : Vi betraktade de 4 serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n}).$$

Sats 2 (integral test). *Låt* $f(x)$ *vara en positiv, avtagande, kontinuerlig funktion i intervallen* $x \geq 1$. *Då konvergerar serien* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *omm detsamma gäller* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$. *Mer precist,*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx. \tag{94}$$

ANMÄRKNING : Notera att (94) ger en analytisk approximation till seriens EXAKT värde om vi kan integrera $f(x)$ analytiskt (dvs, ange en primitiv funktion). Annars, säger (94) ingenting användbar m.a.p. DEL $2'$ eftersom en numerisk beräkning av integralen är mer eller mindre ekvivalent med att beräkna seriens partiella summor.

EXEMPEL : Denna sats kan används för att bevisa lätt att både

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$$

konvergerar om och endast om $\alpha > 1$. Beviset ges i boken (s. 65).

11 Sammandrag av föreläsning 11 Tisdag 7/12/99

De flesta metoder som vi kommer att diskutera idag tillhör STEG 3 av det program som skisserades i den sista föreläsningen, dvs vi är interesserad av att hitta allmäna villkor som garanterar konvergens av vissa typer av serier medan vi struntar i frågor om 'konvergens hastighet'.

Allmäna serier (icke-positiva termer)

Vi är interesserad av att studera serier av godtyckliga komplexa tal. Först har vi

Proposition. *Låt* (z_n) *vara en följd av komplexa tal, säg* $z_n = x_n + iy_n$. *Då konvergerar* $\sum z_n$ *om och endast om både* $\sum x_n$ *och* $\sum y_n$ *konvergerar. I så fall är*

$$\sum z_n = \left(\sum x_n\right) + i\left(\sum y_n\right). \tag{95}$$

BEVIS : Mycket lätt och solklart (dvs en övning !).

Från en synpunkt säger den här propositionen att när man undersöker konvergens av serier, räcker det att betrakta serier av reella tal.

En annan synpunkt, som är också mycket viktig, är att propositionen kan används för att bevisa konvergens av en serie av reella tal genom att skriva serien som den reella delen av en serie av komplexa tal och då att bevisa konvergens av den komplexa serien. Denna är en trick som används ganska ofta eftersom det visar sig ofta mycket enklare att bevisa konvergens av den komplexa serien.[9] Det klassiska exemplet behandlas i övning 8, avsnitt 2.1 i GLO (som vi löste i morse). Även om vi betraktar divergenta serier kan den ändliga versionen av (95) vara användbar, nämligen

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right). \tag{96}$$

[9] I naturvetenskapliga tillämpningar, de funktioner som beskriver fysiska processer är, i slutet av dagen, reella, men det är ofta mycket lättare att genomföra beräkningar med komplexa funktioner. Dessa funktioner uppstår oftast som lösningar till diffekvationer (jag tror att ni måste har sett sådana saker i envariabelanalys eller linjär algebra). I slutet av beräkningen, tar man den reella (eller imaginära) delen av lösningen för att få en fysisk tolkning.

Dvs, kan vi ofta skriva ner en explicit formul för den vänstra leden och alltså få formuler för de summerna på högra sidan.

Exempel (från lektionen) : Vi utvigade övning 8, avsnitt 2.1. För en godtycklig $r > 0$ fick vi att

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta - r^{n+2}\cos n\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} \tag{97}$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\theta = \frac{r\sin\theta - r^{n+1}\sin(n+1)\theta - r^{n+2}\sin n\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}. \tag{98}$$

Det viktigaste fallet är $r = 1$ där vi får alltså

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2} - \frac{\cos n\theta + \cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} \tag{99}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} - \frac{\sin n\theta + \sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}. \tag{100}$$

Dessa uttryck konvergerar inte naturligtvis när $n \to \infty$, men man ser direkt att de är BEGRÄNSADE, om θ inte är en multipel av 2π. Detta är viktigt i många tillämpningar till Fourier serier (se nere).

Riemann's sats

Man måste skilja mellan två olika typer av konvergens för serier med ickepositiva termer, som förklaras av följande definition :

Definition : En konvergent serie $\sum a_n$ av komplexa tal kallas för *absolut konvergent* om $\sum |a_n|$ konvergerar. Annars, säger vi att serien är *betingad konvergent (eng.: conditionally convergent).*

De skönaste serierna är de som är absolut konvergenta. Å andra sidan är det konvergens problemet för andra serier, från en viss synpunkt, inte ens väldefinierad. Situationen sammanfattas i följande imponerande sats av Riemann :

Sats (Riemann). *(i) Om $\sum a_n$ är betingad konvergent då för varje reellt tal s finns det en omskrivning av serien som konvergerar till s. Det finns också omskrivningar som konvergerar till $+\infty$ eller $-\infty$ eller som konvergerar inte alls (oscillerar).*

(ii) Om $\sum a_n$ är absolut konvergent, då konvergerar varje omskrivning till samma värde.

BEVIS : Jag skisserade ett bevis som ni inte behöver lära er för tentan.

Trots att situationen är alltså lite förvirrande för betingade konvergenta serier, finns det många tillämpningar där uppstår sådana serier. Alltså, kan vi inte strunta i dem i följande diskussion.

DIRICHLET'S TEST OCH ABEL'S FORMUL

Det finns många viktiga serier som har formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{101}$$

där (a_k) och (b_k) är två olika följder så att följden (b_k) är av en välkännd och välförstod typ (från synpunkten av konvergens åtminstone), men de termerna a_k är, mer eller mindre, godtyckliga. Man tänker på de a_k som *koefficienterna* i serien.

Vi ger fyra exempel av sådana serier :

A. *Potensserier* : Dessa är serier av formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z \in \mathbf{C}). \tag{102}$$

Här, $b_k = z^k$, en geometrisk följd.

B. *Fourier serier* : Dessa är serier av formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{eller} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx. \tag{103}$$

Här $b_k = \cos kx$ (resp. $\sin kx$).

C. *Alternerande serier* : Ett viktigt speciellt fall av **A.** där vi sätter $z = -1$ och betraktar serier av formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \tag{104}$$

där de a_k är positiva reella tal. Här $b_k = (-1)^k$.

D. *Dirichlet serier* : Uppstår överallt i (analytisk) talteori. Serier av formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} \quad (s \in \mathbf{C}). \tag{105}$$

Här $b_k = \frac{1}{k^s}$. Vi diskuterar inte dessa serier så mycket i denna kurs. Dirichlet inledade dem i beviset av sin berömda sats om aritmetiska följder av heltal.[10]

Idéen bakom Dirichlet's test är att anta att följden b_k åtminstone inte 'blåser upp' och då att hitta tillräckliga villkor på den följden av koefficienterna a_k som garanterar konvergens av serien (102). Han upptäckte följande sats :

Sats 1 (Dirichlet's test). *Låt $(a_k), (b_k)$ vara två följder av reella tal. Antag att*

(i) de partiella summerna $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ utgör en begränsad följd.
(ii) följden (a_k) är avtagande.
(iii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Bevis : Det moderna beviset använder Abel's summationsformul, nämligen

Lemma (Abel). *Låt $(a_k), (b_k)$ vara komplexa talföljder. Då, för $1 \le m < n$ gäller*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1} B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k. \tag{106}$$

Vi bevisade lemman och deducerade satsen, liksom i boken (s. 69-70).

Nu tillämpar vi detta resultat till tre av de ovanstående fyra typer av serier. Tillämpningen till potensserier (typ **A**) uppskyttas till nästa avsnitt.

[10] Varje aritmetisk följd $\{a+nb : n \ge 0\}$ av heltal så att $\gcd(a,b) = 1$ innehåller oändliga många primtal.

B. *Fourier serier* : Enligt diskussionen efter (99) och (100) uppfyller serier av formen (103) det första villkoret i formuleringen av Dirichlet's test. Alltså, får vi följande korollarium av Dirichlet :

Korollarium 1.1 *Låt (a_k) vara en avtagande följd av positiva reella tal som konvergerar till noll. Då konvergerar båda Fourier serier*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \textit{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

för alla $x \in (0, 2\pi)$.

C. *Alternerande serier* : $B_n = -1$ för udde n och $B_n = 0$ för jämt n. Alltså uppfylls villkor (i) och får vi följande korollarium till Dirichlet (som går hela vägen tillbaka till Leibniz !) :

Korollarium 1.2 *Låt (a_k) vara en avtagande följd av positiva heltal som konvergerar till noll. Då konvergerar den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.*

Anmärkning : Det är klart att villkoret $a_k \to 0$ är nödvandigt i kor. 1.2 - annars går den k:te termen inte mot noll. Det är lite mer av en utmaning att skapa en (icke-avtagande) följd (a_k) av positiva tal som går mot noll, men så att $\sum(-1)^k a_k$ inte konvergerar (se inlämningsuppgift nr. 2).

D. *Dirichlet serier* : Vi framställer följande resultat utan bevis (beviset är inte svårt - du kan försöka dig själv !)

Korollarium 1.3 *Om serien $\sum a_n n^{-s}$ konvergerar för någon $s_0 \in \mathbf{C}$ då konvergerar den för alla s så att $Re(s) > Re(s_0)$. Alltså konvergerar en Dirichlet serie i ett halvtplan.*

Potensserier

Den huvudsatsen om potensserier som vi vill äntligen bevisa är följande :

Sats. *Det finns en konstant $R \geq 0$ (kanske $R = +\infty$) så att den potensserien $\sum a_n z^n$ konvergerar absolut för $|z| < R$ och divergerar för $|z| > R$. Mer* *precist,*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \quad \text{(Hadamard's formul).} \tag{107}$$

ANMÄRKNINGAR : (a) R kallas för seriens *konvergensradie.*
(b) Beviset av denna sats använder inte Dirichlet's test.
(c) Satsen säger ingenting om vad som händer på 'randcirkeln' $|z| = R$. Ofta används Dirichlet's test för att undersöka var serien konvergerar på denna cirkel, men metoden fungerar inte alltid och det finns faktist ingen allmän metod. Det kan bli mycket svårt att analysera en potensserie på dess randcirkel.

Det första steget i beviset av satsen är att förklara den nya teminologin 'lim sup'.

DEFINITION : Låt (a_n) vara en följd av reella tal. Vi definierar

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \tag{108}$$

och

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right). \tag{109}$$

Notera att både limsup och liminf av en godtycklig (konvergent eller divergent) följd av reella tal existerar, om vi tillåter $\pm\infty$ som gränsvärde, efterom i (108) resp. (109) tar vi lim av en avtagande resp. växande följd.

De viktiga egsnskaperna hos limsup och liminf sammanfattas i följande proposition, som är välvärd att bevisa i sin helhet :

Proposition. *(i)* $\limsup a_n = +\infty \Leftrightarrow (a_n)$ *uppåt obegränsad.*

(ii) $\liminf a_n = -\infty \Leftrightarrow (a_n)$ *nedåt obegränsad.*

(iii) Om $\limsup a_n = l$ *då för varje* $\epsilon > 0$ *finns det bara ändliga många* n *så att* $a_n > l + \epsilon$*, men det finns oändliga många* n *så att* $a_n > l - \epsilon$*.*

(iv) Om $\liminf a_n = l$ *då för varje* $\epsilon > 0$ *finns det bara ändliga många* n *så att* $a_n < l - \epsilon$*, men det finns oändliga många* n *så att* $a_n < l + \epsilon$*.*

(v) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(vi) $\liminf a_n = \limsup a_n \Leftrightarrow \lim a_n$ *existerar och i så fall är* $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

BEVIS : Gavs i föreläsningen. Vissa delar finns i boken.

12 Sammandrag av föreläsning 12 Torsdag 9/12/99

Sats (Rotkriteriet). *Låt* (a_n) *vara en följd av komplexa tal. Sätt*

$$L = \limsup |a_n|^{1/n}. \tag{110}$$

(i) Om $L < 1$, *då konvergerar* $\sum |a_n|$.
(ii) Om $L > 1$ *då divergerar* $\sum a_n$.

ANMÄRKNING : Notera att denna sats ger ingen information om $L = 1$. Satsen vore faktiskt mycket mer kraftfull om det inte var så många serier med $L = 1$.

BEVIS : Gavs i föreläsningen. Notera att i beviset användade vi del (iii) av den sista propositionen i föreläsning 11.

Korollarium (Kvotkriteriet). *Låt* (a_n) *vara en följd av komplexa tal. Antag att*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ existerar, } = L \text{ säg.} \tag{111}$$

(i) Om $L < 1$ *då konvergerar* $\sum |a_n|$.
(ii) Om $L > 1$ *då divergerar* $\sum a_n$.

BEVIS : Man visar att (110) antyder (111). Gavs i föreläsningen.

Den huvudsats för potensserier (se föreläsning 11) kan också deduceras från det Rotkriteriet, som vi visade i föreläsningen.

Följder och serier av funktioner

I första hand koncentrerar vi på följder eftersom en serie är bara en viss typ av följd. Den fondamentala definitionen i detta ämne är följande

DEFINITION : Låt $D \subseteq \mathbf{R}$ och låt (f_n) vara en följd av reellvärda funktioner med gemensam definitionsmängd D. Vi säger att följden (f_n) *konvergerar punktvis* på D om, för varje $x \in D$, den följd $(f_n(x))$ är en konvergent följd av reella tal. I så fall definierar vi en funktion $f : D \to \mathbf{R}$ genom

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{112}$$

Denna funktion kallas för den *gränsfunktion* till följden (f_n). Man skriver symboliskt $f_n \to f$.

Betrakta följande intuitiv hierarki av egenskaper hos reellvärda funktioner[11]:

$$\begin{array}{c}
\boxed{\text{Lebesgue mätbar}} \\
| \\
\boxed{\text{Riemann integrerbar}} \\
| \\
\boxed{C^0 = \text{kontinuerlig}} \\
| \\
\boxed{C^1 = \text{kontinuerligt differentierbar}} \\
| \\
\boxed{C^k = k\text{-gånger kontinuerligt differentierbar}} \\
| \\
\boxed{C^\infty = \text{glatt}}
\end{array}$$

Utan att vara mycket precis, de egenskaper mot toppen av hierarkin ägas av mer funktioner, alltså är svagare och svårare att analysera men mer allmäna. Vi har också två operationer på reellvärda funktioner, nämligen 'integration' och 'differentiation', som tar man ner (resp. upp) i hierarkin.

[11] Jag medger att diagrammet är imprecist. Till exempel kan man inte ens prata om differentierbarhet om definitionsmängden inte är öppen. Också har ni kanske bara sett en teori av Riemann integration över slutna intervaller. Men om vi glömmer dessa 'technicalities' just nu, tror jag att diagrammet har fortfarande sitt värde för en inutitiv uppfattning av det problem som vi kommer att diskutera nere.

Just nu har vi definierat en ny operation på följder av reellvärda funktioner, nämligen formation av gränsfunktioner. Den centrala frågan i detta ämne är hur man rör sig i ovanstående figuren när man konstruerar gränsfunktioner.

Nu låt oss vara mer precis, och ställa fyra viktiga och naturliga frågor :

FRÅGA 1 : Låt (f_n) vara en följd av reellvärda funktioner med gemensam definitionsmängd D. Antag att $f_n \to f$ på D. Om varje f_n är kontinuerlig på D, måste detsamma gälla f ?

SVAR : Nej !!! som visas av följande exempel. Låt $D = [0,1]$, $f_n = x^n$. Då är varje f_n tydligen kontinuerlig, till och med C^∞. Men $f_n \to f$ där

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1. \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad (113)$$

Alltså har f en diskontinuitet vid $x = 1$.

FRÅGA 2 : Låt (f_n) vara en följd av reellvärda funktioner med gemensam definitionsmängd $D = [a,b]$, en ändlig sluten intervall. Antag att varje f_n är Riemann integrerbar och att $f_n \to f$.

(i) Måste f vara Riemann integrerbar ?

(ii) Antag att f ÄR Riemann integrerbar ? Måste

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad ? \tag{114}$$

SVAR : (i) Nej !!! Att ge ett explicit exempel vore lite för abstrakt för denna kurs, men de finns ! Å andra sidan kan man bevisa lätt (när man känner de lämpliga definitionerna) att gränsen till varje punktivs konvergent följd av Lebesgue mätbara funktioner är också Leb. mät. Detta visar en gång till varför Lebesgue's teori av integration är mycket mer tillfredställande än Riemanns teori.

(ii) Nej !!! som visas av följande exempel. Låt $D = [0,1]$ och $f_n(x) = (n+1)x^n - (n+1)x^{n^2}$. Notera att varje f_n är C^∞. Man kontrollerar lätt att f_n konvergerar punktivs till den nolla funktionen, alltså är $\int_0^1 f = 0$. Å andra sidan beräknar man också lätt att $\int_0^1 f_n = 1 - \frac{n+1}{n^2+1} \to 1$.

OBS! Man kan modifiera detta exempel för att skapa en punktvis konvergent följd (f_n) så att $\int_0^1 f_n$ inte ens konvergerar (se inlämningsuppgift nr. 2).

FRÅGA 3 : Låt följden (f_n) ha en gemensam definitionsmängd D och antag att $f_n \to f$. Vi har sett att även om alla f_n är C^∞, behöver f vara inte ens kontinuerlig. Men nu antag att alla f_n är C^∞ och att f ÄR kontinuerlig - måste den vara minst också differenterierbar ?

SVAR : Nej !!! som visas av följande exempel. Låt $D = [-1, 1]$ och

$$f_n(x) = \begin{cases} -x + \frac{e^{nx}}{n}, \ -1 \leq x < 0. \\ x - \frac{e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n}, \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (115)$$

Då kontrollerar man att varje f_n är C^∞ och att $f_n \to f$ där $f(x) = |x|$, som är kontinuerlig men ej differentierbar vid $x = 0$. Vi ska komma tillbaka till detta exempel senare.

FRÅGA 4 : Låt följden (f_n) ha gemensam definitionsmängd D och konvergerar punktvis till f. Antag att varje f_n är C^1.

(i) Måste följden (f_n') konvergerar punktvis på D ?

(ii) Antag att de gör så och även att f är också C^1. Måste $f_n' \to f'$?

SVAR : Nej !!! i båda fall. Här är det lite svårare att ge explicita exempel så vi gjorde den inte men gav en idé för att konstruera dem.

Alltså ser från denna diskussion att de flesta funktionsegenskaper i ovanstående hierarkin respekteras inte under formationen av gränsfunktioner. Teorin av puntkivs konvergens är mycket mycket otillfredställande !! Men de frågor som vi har ställt är både naturliga och viktiga, och det skulle bli mycket bra om man kunde ge allmäna tillräckliga villkor, som inte är för restriktiva, men som garanterar att alla fyra och liknande frågor förvärvar (acquire) positiva svar. Det kommer vi att göra nästa gång.

13 Sammandrag av föreläsning 13 Tisdag 14/12/99

Likforming konvergens

Förra gången ställde vi fyra frågor, alla med negativa svar, som visade att under formationen av gränsfunktioner till punktvis konvergenta följder bevaras (preserved) inte i allmänhet många viktiga funktionsegenskaper. Alltså vad kan vi göra för att få en bättre teori ? Det verkar vara två möjligheter :

(A) inskränka de typer av funktioner som betraktas

(B) försöka inleda en precis men starkare typ av konvergens för följder som är inte för restriktiv och artificiell men som garanterar bättre resultat.

Det visar sig att synpunkt (B) är korrekt. Intuitivt, problemet med att jobba med bara punktvis konvergenta följder är att det kan vara stora variationer i de konvergens hastigheterna i olika punkter.

Alltså, den intuitiva lösningen för detta problem är att betrakta bara punktvis konvergenta följder där den konvergens hastigheten är ungefär samma (det vore bättre att säga 'nedre begränsad') i alla punkter.

Vi ska nu illustrera denna idé med en mer modern formulering. Idéen är att betrakta alla funktioner $f : D \to \mathbf{R}$ (för någon fixerad D) och att uppfatta varje funktion som en punkt i (det stora, oändligt dimensionella) rummet av alla sådana funktioner. Då försöker vi definiera en 'distans' $d(f, g)$ mellan två godtyckliga punkter i detta rum, och säger att följden (f_n) av funktioner konvergerar till en funktion f om $d(f_n, f) \to 0$.

Det visar sig att man kan genomföra dett program i rummet, inte av alla reellvärda funktioner på D, men bara av de begränsade funktionerna.

NOTATION : För $D \subseteq \mathbf{R}$ är $L^\infty(D) := \{f : D \to \mathbf{R} \mid f \text{ är begränsad}\}$.

DEFINITION : Vi definierar den ∞-*normen* $||f||_\infty$ av en funktion $f \in L^\infty(D)$ genom

$$||f||_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in D} |f(x)|. \tag{116}$$

Proposition. *$L^\infty(D)$ är sluten under addition och skalär multiplikation,* *alltså ett vektorrum*[12]*. Den funktion* $|| \ ||_\infty : L^\infty(D) \to \mathbf{R}$ *har följande egenskaper :*

(i) $||f|| \geq 0$ *och* $||f|| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
(ii) $||\lambda f|| = |\lambda| ||f||$ *för alla* f*, och alla* $\lambda \in \mathbf{R}$.
(iii) (triangel olikheten) $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Bevis : Övning.

För ett allmänt vektor rum X, en reellvärd funktion $X \to \mathbf{R}$ med ovanstående tre egenskaper kallas för en *norm* på X. Paret $(X, || \ ||)$ kallas för ett *normerat linjärt rum (NLR).*

Definition 2 : Låt $f, g \in L^\infty(D)$. Den *distansen* mellan f och g definieras genom

$$d(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} ||f-g||. \tag{117}$$

Proposition. *Den funktion* $d : L^\infty(D) \times L^\infty(D) \to \mathbf{R}$ *har följande egenskaper :*

(i) $d(f,g) \geq 0$ *och* $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.
(ii) (symmetri) $d(f,g) = d(g,f)$.
(iii) (triangel olikheten) $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$ *för alla* f, g, h.

Bevis : Följer från förra propositionen. övning !

För en godtycklig mängd X en funktion $d : X \times X \to \mathbf{R}$ med dessa tre egenskaper kallas för en *metrik* på X. Paret (X, d) kallas för ett *metriskt rum.* Notera att Definiton 2 kan tillämpas i varje NLR, dvs att en metrik kan anslutas till varje norm, så att varje NLR är också ett metriskt rum[13].

Definition 3 : En följd (f_n) av funktioner i $L^\infty(D)$ sägs *konvergera lik-*

[12] Det är 'lätt' att se att detta rum är oändligt dimensionellt om och endast om D är en oändlig mängd.

[13] Alltså är ett metriskt rum en generalisering av det vanliga Euklidiska rummet $\mathbf{R}^n$. I varje metriskt rum kan vi inleda begrepp liksom 'konvergent följd' och 'Cauchy följd'. Ett metriskt rum kallas för *fullständigt* om alla Cauchy följder konvergerar. Alltså är $\mathbf{R}^n$ fullständigt med den vanliga Euklidiska metriken. Ett fullständigt NLR kallas för ett *Banach rum.* För mer i denna riktning, se t.ex. Simmons' bok.

formigt till en funktion $f \in L^\infty(D)$ om $d(f_n, f) \to 0$.

I mer gammaldags språk, konvergerar (f_n) likformigt till f om, för varje $\epsilon > 0$ finns det $N_\epsilon > 0$ så att $n > N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ för alla $x \in D$.

NOTATION : $f_n \to_L f$ betyder att konvergensen är likformig.

Med detta nytt begrepp kan vi få positiva svar till våra fyra frågor. Vi börjar med

Sats 1. *Låt $D \subseteq \mathbf{R}$. Om $f_n \to_L f$ på D och varje f_n är kontinuerlig då är f också kontinuerlig.*

BEVIS : Gavs i föreläsningen. Det är Sats 3.3 i GLO.

ANMÄRKNING : Titta på exemplet efter FRÅGA 1 i den sista vorelesungen. Här går f_n inte mot f likformigt. Vi visade faktiskt att $||f_n - f|| \to 1$.

Korollarium 1.1. *Låt $D = [a, b]$, en ändlig sluten intervall. Antag att $f_n \to_L f$ på D. Om varje f_n är kontinuerlig, då är f integrerbar och*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{118}$$

BEVIS : Gavs i vorelesungen. Det är Sats 3.5 i GLO.

ANMÄRKNING : Kor. 1.1 är verkligen bara en 'Mickey Mouse' sats i integrationsteori - ekv. (118) stämmer under mycket svagare villkor. Den *Lebesgue dominerad konvergens satsen* säger att (118) stämmer om $f_n \to f$ punktvis och det finns en positiv funktion $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ så att (i) $\int_a^b g\, dx < \infty$ (ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ för alla n och alla $x \in [a, b]$.

Trots att dessa villkor är klart mycket svagare än de i korollariet, är det fortfarande lätt att hitta ett exempel där de inte uppfyllas. Se exemplet efter FRÅGA 2 i den sista vorelesungen.

Nästa steg är att betrakta följder av C^1-funktioner (med öppna definitionsmängder). På grund av vad vi har redan bevisat skulle man tänka kanske att följande omformulering av FRÅGA 3 borde ha ett positivt svar :

FRÅGA 3* : Om $D \subseteq \mathbf{R}$ är öppen, $f_n \to_L f$ på D och varje f_n är C^1, måste f också vara C^1 ?

Men svaret är fortfarande NEJ !!! Notera att Sats 1 garanterar att f är kontinuerlig. Men det exempel (115) i den sista vorelesungen visar att f inte behöver vara kontinuerlig. Man kan kontrollera lätt att $f_n \to_L f$ i det exemplet.

Det visar sig att vad som garanterar differentierbarhet av f är likformig konvergens av de derivatorna (f'_n). Vi bevisar

Sats 2. *Låt $D = (a, b)$, en ändlig öppen intervall. Låt (f_n) vara en följd i $C^1(D)$. Antag att*

(i) det finns minst en punkt $x_0 \in D$ så att följden $(f_n(x_0))$ konvergerar.
(ii) följden (f'_n) konvergerar likformigt på D (mot någonting).

Då konvergerar (f_n) likformigt på D, till en funktion f säg. Dessutom är f en C^1-funktion och $f'_n \to_L f'$. Dvs,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right). \tag{119}$$

BEVIS : Gavs i vorelesungen. Det är Sats 3.7 i GLO.

ANMÄRKNING 1 : M.a.p. villkor (i) i ovanstående sats, kan man skriva ner ett (helt triviallt !) exempel av en följd av funktioner vars derivator konvergerar likformigt på hela $\mathbf{R}$, men så att (f_n) konvergerar inte i en enda punkt ! Se inlämningsuppgift nr. 2.

ANMÄRKNING 2 (real analysis sucks !) : Det är värd att notera att den analogen till FRÅGA 3* har ett positivt svar i komplex analys. Det finns

Weierstrass' sats : Om en följd (f_n) av differentierbara[14] funktioner konverg-

[14]En differentierbar komplexvärd funktion $f(z)$ av en komplex variabel z kallas mer vanligt för *analytisk* eller *holomorfisk*. Komplex analys är en mycket mer vacker och mycket mer 'rigid' teori än reell analys. Den fondamentala orsaken är att varje differentierbar komplex funktion är faktiskt C^∞ !! Detta följer från den berömde satsen av Cauchy i komplex analys.

erar punktvis i ett öppet delområde Ω till $\mathbf{C}$, och likformigt i varje kompakt delmängd till Ω, då är gränsfunktionen f differentierbar och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dz} f_n(z) = \frac{d}{dz} f(z). \tag{120}$$

Exempel (115) från torsdag visar också att en annan vacker sats från komplex analys kan inte utvigas till den reella domänen, nämligen

Hurwitz sats : Med samma villkor som i Weierstrass' sats, antag också att $f_n(z) \neq 0$ för alla $z \in \Omega$ och alla n. Då antingen detsamma gäller f eller f är identiskt noll i Ω.

14 Sammandrag av föreläsning 14 Torsdag 16/12/99

Serier av funktioner

Nu vill vi tillämpa de resultaterna från tisdagens diskussion till serier av funktioner. Först, den fondamentala definitionen :

DEFINITION 1 : Låt (f_n) vara en följd av funktioner med gemensam definitionsmängd D. Låt $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ för $x \in D$. Om följden (F_n) konvergerar punktvis (resp. likformigt) till en funktion f på D, då säger vi att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergerar punktvis (resp. likformigt)* till $f(x)$ på D.

Proposition 1. *$\sum f_n \to_L f$ om och endast om $\sum f_n \to f$ punktvis och*

$$|| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) || \to 0 \text{ när } n \to \infty. \tag{121}$$

BEVIS : Följer omedelbart från definitionen. Notera att ibland är det enklare att använda villkor (121) beskrivet i termer av Cauchy följder, dvs (121) är ekvivalent med att säga att

$$|| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \, || \to 0 \text{ när } m, n \to \infty. \tag{122}$$

Som vi har redan sett, är det likformigt konvergens som är den önskvärda egenskapen hos följder av funktioner. Detsamma gäller serier, naturligt, eftersom Definition 1 antyder att en serie är bara en viss följd (de två begreppen är faktiskt ekvivalenta, eftersom till varje följd (f_n) kan anslutas den teleskopande serien $\sum f_n - f_{n+1}$). Satser 1, 2 tillsammans med Korollarium 1.1 från tisdag har följande omedelbara formuleringar för serier :

Sats 1.S *Antag att $\sum f_n \to_L f$ i mängden D och att varje f_n är kontinuerlig. Då är f också kontinuerlig.*

Korollarium 1.1.S *Antag att* $\sum f_n \to_L f$ *i den slutna intervallen* $D = [a,b]$*, och att varje* f_n *är kontinuerlig. Då är* f *integrerbar och*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{123}$$

Sats 2.S *Låt* $D = (a,b)$ *och* (f_n) *en följd av* C^1*-funktioner på* D*. Antag att*

(i) det finns minst en punkt $x_0 \in D$ *där* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konvergerar.*
(ii) $\sum f_n'$ *konvergerar likformigt i* D*.*

Då konvergerar $\sum f_n$ *likformigt i* D *till en* C^1*-funktion,* f *säg, och*

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x). \tag{124}$$

Nu vill vi ge både ett nödvändigt och ett tillräckligt villkor för likformig konvergens av en serie av funktioner. Först, det nödvändiga villkoret :

Proposition 2. *Om* $\sum f_n$ *konvergerar likformigt då* $||f_n|| \to 0$.

Bevis : Gavs i föreläsningen (prop. 3.2 i boken). Detta resultat borde jämföras med villkoret som säger att om en punktserie $\sum a_n$ konvergerar, då måste $a_n \to 0$.

Sats (Weierstrass M-test). *Ett tillräckligt villkor för att* $\sum f_n$ *konvergerar likformigt är att* $\sum ||f_n||$ *konvergerar.*

Bevis : Gavs i föreläsningen.

Anmärkning : Trots att Weierstrass' test är ganska 'hjärnlös', tror jag att det är inte så lätt att se att villkoret inte är nödvändigt. Men det är så !! (se inlämningsuppgift nr. 2).

Exempel 1 : Betrakta följden $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$. Följden konvergerar punktvis i $(0,\infty)$ som lätt bevisas med hjälp av det jämförelsekriteriet. Weierstrass' test kan används för att bevisa att du får likformig konvergens i varje intervall $[r,\infty)$ för $r > 0$. Men Proposition 2 kan används för att visa att du INTE får likformig konvergens i hela intervallen $(0,\infty)$ ($||f_n|| = 1$ för alla n).

Detta exempel uppvisar en ganska typisk situation, nämligen att du har punktivs konvergens i en mängd D och likformigt konvergens i varje delmängd $D^* \subseteq D$ som är 'begränsad bort' från en eller fler problematiska punkter. Ett speciellt och särskilt viktigt fall av denna situation visas av följande exempel :

EXEMPEL 2 : Betrakta den geometriska serien $\sum x^n$, för en reell variabel x. Vi vet att serien konvergerar punktvis i $(-1, 1)$. Med hjälp av Prop. 2 och den M-testen, bevisar vi lätt serien konvergerar likformigt i varje sluten delintervall, men inte i hela öppna intervallen. Eftersom varje kompakt delmängd till $(-1, 1)$ ligger i någon sluten delintervall, då kan vi säga att serien konvergerar i varje kompakt delmängd till $(-1, 1)$.

OBS !! Det är VIKTIGT att veta (trots att boken säger ingenting om det) att Satser 1, 1.S, 2 och 2.S (3.3,3.4,3.7,3.8 i boken) stämmer fortfarande om vi ersätter villkoret 'likformig konvergent' med 'likformig konvergent i varje kompakt delmängd'[15]. Nästa sats uppvisar detta för potensserier - det allmäna beviset är liknande. Notera också att Weierstrass' sats i komplex analys formuleras med denna typ av konvergens. Det var faktiskt Weierstrass som upptäckte att den här var det korrekta konvergens begreppet för att få den bästa kombinationen av starka resultat och bred tillämpning.

Sats (utvidning av huvudsatsen för potensserier). *Låt* $\sum a_n z^n$ *vara en potensserie med konvergensradie* R. *Då*

(i) serien konvergerar likformigt i varje kompakt delmängd till $|z| < R$.
(ii) serien är differentierbar i $|z| < R$ *och*

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{125}$$

[15] Den fondamentala orsaken för detta är att $\mathbf{R}^n$ (eller $\mathbf{C}^n$) har den topologiska egenskapen att varje punkt har en kompakt omgivning och till och med att varje omgivning innehåller en kompakt omgivning. Denna egenskap kallas för *lokal kompakthet*. I topologi, är lokal kompakthet en av de viktigaste egenskaperna hos allmäna topologiska rum, särksilt hos så kallade *Hausdorff* rum.

(iii) Serien är integrerbar i $|z| < R$ och

$$\int_0^{z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z_0^{n+1}. \tag{126}$$

Bevis : Gavs i föreläsningen. Notera att z är en komplex variabel i denna sats, men eftersom ni har inte gjort komplex analys, räcker det att kunna bevisa satsen i det reella fallet.

Repeterad tillämpning av del (ii) av satsen antyder att varje potensserie är C^∞ i inren av dess konvergensskivan. I komplex analys har detta observation följande stor generalisering :

Sats. *Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion i det öppna sammanhängande området $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Då är $f(z)$ en C^∞-funktion i Ω. Dessutom, om z_0 är en punkt i Ω och $B(z_0, R) \subseteq \Omega$ då kan $f(z)$ representeras som en potensserie i $B(z_0, R)$. Denna serie är lika med den Taylor utvecklingen av $f(z)$ kring punkten z_0.*

Bevis : Läs en godtyclkig bok om Komplex Analys, eller tag en kurs ! Nyckel ord : Cauchy's sats och Cauchy's Integral formul.

I allmänhet, om en funktion $f(z)$ av en reell eller komplex variabel z kan representeras som en potensserie i en öppen skiva $|z - z_0| < R$, då måste $f(z)$ vara C^∞ i skivan och serien vara lika med den Taylor utvecklingen av $f(z)$ kring punkten z_0. Detta bevisas i boken (korollarium 3.14). Vi har inte tiden för att diskutera denna sats vidare, men det är värd att läsa den er själva !

15 Sammandrag av föreläsning 15 Tisdag 11/01/00

Serier av icke-positiva funktioner

Weierstrass' M-test för likformig konvergens av en serie av funktioner är verkligen en test för serier av positiva funktioner. Mer precist, serien $\sum f_n$ satisfierar villkoret i M-testen (nämligen att $\sum ||f_n|| < \infty$) om och endast om serien $\sum |f_n|$ av absolut belopp gör det.

Men det finns många (och ofta viktiga) typer av serier av funktioner som inte satisfierar detta villkor men är fortfarande likformigt konvergenta. Man kan till och med ge ett exempel av en sådan serie där alla termer är positiva (lite svårare, dock - se de supplementära frågorna på kurshemsidan), men de flesta exemplen uppstår bland serier med icke-positiva termer.

Lyckligtvis, finns det en allmän sats som ger ett tillräckligt (men inte nödvändigt !) villkor för likformig konvergens av allmäna serier. Den är en direkt generalisering av Dirichlet's sats för serier av reella tal (sats 2.9). Först en definition :

DEFINITION : Låt $(\phi_n(x))$ vara en följd av funktioner med gemensam definitionsmängd D. Följden sägs vara *likformigt begränsad* i D om det finns $C > 0$ så att $||\phi_n|| \leq C$ för alla n.

Nu kan vi ställa fram

Sats (Dirichlet). *Låt $(f_n(x))$, $(g_n(x))$ vara två följder av funktioner med gemensam definitionsmängd D. Serien $\sum f_n(x)g_n(x)$ är likformigt konvergent i D om följande tre villkor satisfieras :*

(i) För varje $x \in D$, följden $(f_n(x))$ av reella tal är avtagande.
(ii) $f_n \to_L 0$, dvs $||f_n|| \to 0$.
(iii) Följden $G_n(x) := \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ av partiella summor är likformigt begränsad i D.

BEVIS : Gavs i föreläsningen. Sats 3.10 i boken.

EXEMPEL : Låt $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx}$. Dirichlet's sats visar att serien $\sum f_n$ är likformigt konvergent i varje intervall av formen $[r, \infty)$, där $r > 0$. Men notera att i en sådan intervall är $||f_n|| = \frac{1}{nr}$ så att $\sum ||f_n|| = +\infty$. Alltså, visar detta exempel att Weierstrass' M-test inte ger ett nödvändigt villkor för likformigt konvergens.

Representation av funktioner med serier

I denna kurs är vi interesserad av att studera särskilt två viktiga typer av serier. Den första typen har vi redan sett :

TYP 1 : POTENSSERIER

Här samlar vi de viktigaste resultaten från teorin av sådana serier :

A. *Konvergens* : Det konvergens problemet för potensserier har ett ganska klart svar. Varje potensserie $\sum a_n z^n$ har en konvergensradie som ges explicit av Hadamard's formul. Serien konvergerar absolut i skivan $|z| < R$ och likformigt i dess kompakta delmängder, och divergerar för $|z| > R$. Analysen blir svårt på cirkeln $|z| = R$ där varje serie måste analyseras individuellt och det finns få allmäna satser. En sådan sats är Abel's kontinuitetssats (3.15) som vi hinner inte diskutera.

B. '*Unikhet*' : För en given reell funktion $f(x)$ finns det högst en potensserie $\sum a_n x^n$ som representerar f. De koefficienterna ges explicit av $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ så att serien är lika med den Taylor utvecklingen till f (3.14). Särskilt är funktionen f en C^∞-funktion i närheten av origon om den kan representeras med en potensserie.

C. *Representerbarhet* : Å andra sidan finns det många C^∞-funktioner som inte kan representeras med potensserier. Dvs, finns det många C^∞-funktioner vars Taylor utvecklingar konvergerar inte till dem. Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (127)$$

är ett exempel. Det finns en imponerande sats av Borel som säger att för varje följd (a_n) av reella tal, finns det en C^∞-funktion med Taylor koefficienter a_n.

D. *Approximation* : Om en funktion kan representeras som en potensserie då kan den intuitivt approximeras med polynom. Men det finns en berömd sats som säger någonting mycket, mycket starkare. Det är

Sats (Stone-Weierstrass). *Låt X vara en kompakt delmängd till* $\mathbf{R}$ *och* $f : X \to \mathbf{R}$ *kontinuerlig. Då för varje* $\epsilon > 0$ *finns det ett polynom* p *så att* $||f - p||_\infty < \epsilon$.

För ett bevis se, till exempel, Simmons' bok.

Typ 2 : Trigonometriska (Fourier) serier

Teorin av Fourier serier är mycket rikare (och svårare !) än den av potensserier och det finns många böcker i biblioteket som behandlar den. Den standarda referens boken (men inte den lättaste !) är Zygmund's 'Trigonometric series'. Här kan vi bara 'scratch the surface of the theory'.

Vi betraktar funktioner $f(x)$ som kan representeras med serier av formen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{128}$$

Notera att en sådan f måste vara periodisk med period en delare av 2π. Här är några viktiga resultat

A. '*Unikhet*': Om $f(x)$ kan representeras i formen (128) och serien konvergerar likformigt i $[0, 2\pi]$, då får vi explicita formuler till de koefficienterna i termer av f, nämligen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx. \end{aligned} \tag{129}$$

Alltså, finns det högst en trigonometrisk serie som representerar en given 2π-periodisk funktion f och som konvergerar likformigt till f. Också, formuler (129) tillåter man att definiera DEN Fourier serien till en godtycklig integrerbar, 2π-periodisk funktion f.

B. *Konvergens* : I teorin av Fourier serier, det viktigaste problemet är att ange allmäna villkor som garanterar (punktvis eller likformigt) konvergens av den Fourier serien till en godtycklig integrerbar, 2π-periodisk funktion f. Det visar sig att de funktioner som kan behandlas bäst är de som har *begränsad variation (eng.: bounded variation).* Vi skall inte definiera detta begrepp (se, t.ex. Rudin's 'Real and complex analysis', kap. 7) men, som speciella fall, ställer vi fram två satser som är de bästkända och viktigaste i tillämpningar. Först, en definition :

DEFINITION : Låt $\alpha > 0$ och $[a, b]$ vara en sluten intervall. En funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sägs satisfiera ett *Lipschitz α-villkor* om det finns $C > 0$ så att

$$|f(s) - f(t)| \leq C|s - t|^{\alpha} \quad \text{för alla } s, t \in [a, b]. \tag{130}$$

Sats 1 (Rudin, övning 5.22). *Om f är 2π-periodisk och satisfierar ett Lipschitz villkor, då konvergerar den Fourier serien till f likformigt till f.*

EXEMPEL : En C^1 funktion satisfierar ett Lipschitz 1-villkor i varje sluten intervall (medelvärdesats : den första derivaten är begränsad). Alltså gäller Sats 1 alla C^1-, 2π-periodiska funktioner, som förklarar satsens viktighet. Man kan bevisa faktiskt någonting mer allmän :

Sats 2 (3.11 i boken). *Låt f vara en 2π-periodisk funktion som satisfierar följande tre villkor i varje intervall av längd 2π :*

(i) f har ändliga många ändliga diskontinuiteter (inga asymptoter !)
(ii) f är C^1 i varje öppen intervall mellan två diskontinuiteter
(iii) både f och f' har två en-sidiga gränsvärde i varje diskontinuitet.

Då konvergerar den Fourier serien till f punktvis. Den konvergerar till $f(x)$ om f är kontinuerlig vid x. Den konvergerar likformigt i varje sluten intervall där f är C^1. Och den konvergerar till $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ i varje diskontinuitet.

De tre villkoren i formuleringen av denna sats kallas för *Dirichlet's villkor.*

Punkten med Sats 2 är att den tillåter man att ansluta Fourier serier till C^1-funktioner som inte är 2π-periodiska. Var och en av dessa serier ger en giltig representation av funktionen i en öppen intervall av längd 2π. Idéen är följande : tag en allmän C^1-funktion f. Inskränka f till en halv-öppen intervall I av längd 2π. Konstruera en 2π-periodisk funktion genom att 'repeating the pattern'. Denna funktion satisfierar de Dirichlet villkoren så antyder Sats 2 att dess Fourier serie konvergerar likformigt. Denna serie representerar f i inren till I.

Exempel : Vi skall göra exempel 4, s.105 på torsdag.

Till slut, några andra resultat av möglig interesse. Alla funktioner är 2π-periodiska.

C. Den *Riemann-Lebesgue lemman* antyder att de Fourier koefficienterna (ges av (129)) till varje kontinuerlig funktion går mot noll när $n \to \infty$. Ofta konvergerar $\sum a_n$ och $\sum b_n$ absolut och i dessa fall konvergerar den Fourier serien likformigt enligt Weierstrass' M-test (övning 3.2.5). Mer ofta är följderna $(a_n), (b_n)$ åtminstone avtagande och då får vi likformig konvergens av den Fourier serien i varje intervall av formen $[r, 2\pi - r]$ $(r > 0)$ och punktvis konvergens i $(0, 2\pi)$ (se s.72-3 av GLO).

Motsatsen av den Riemann-Lebesgue lemman stämmer inte, dvs finns det följder a_n, b_n som $\to 0$ men som inte är de Fourier koefficienterna till en kontinuerlig funktion. Ett explicit exempel verkar vara ganska svårt att ge. Å andra sidan, den *Riesz-Fischer satsen* säger att det finns en sådan kontinuerig funktion om både $\sum a_n^2$ och $\sum b_n^2$ konvergerar. Jämför detta resultat med Borel's sats om potennserier.

D. *Approximation* : Det finns ju en 'trigonometrisk Stone-Weierstrass' sats, nämligen för varje kontinuerlig f och $\epsilon > 0$ finns det ett trigonometriskt polynom p så att $||f - p||_\infty < \epsilon$.

Bevis av ovanstående satser finns, t.ex., i Rudin's bok.