MAN 030 : Hösten 99
Inlämningsuppgift 1
(att lämnas in senast 5/10/99)

F.1 Låt S vara mängden av punkter $P \in \mathbf{R}^3$ så att avståndet från P till $(1,2,3)$ är lika med avståndet från P till $(4,-1,2)$.

(i) Vad för slags yta är S ? Bestäm dess ekvation.

(ii) Skissera S.

F.2 Använd definitionerna av kontinuitet och differentierbarhet för att bevisa direkt att $f(x,y) = x^2y^2$ är kontinuerlig och differentierbar vid $(2,2)$.

F.3 Undersök $\lim_{(x,y)\to(0,0} f(x,y)$ för var och en av följande funktioner. Om du tror att gränsvärdet inte existerar, bevisa den. Om du tror motsatsen, beräkna gränsvärdet, med bevis.

(i) $f(x,y) = (x^2)^y$.

(ii $f(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

(iii) $f(x,y) = (1+x)^{\frac{1}{y}}$.

F.4 **(i)** Betrakta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0.0). \end{cases}$$

Är f kontinuerlig vid $(0,0)$? Är f differentierbar där ? Bevisa dina svar.

***(ii)** Betrakta funktionerna

$$f_{ijk}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^i+y^j}{x^{2k}+y^{2k}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

där (i, j, k) är en tripel av positiva heltal. Bevisa två satser som ger nödvändiga och tillräckliga villkor på i, j, k så att f_{ijk} är **(a)** kontinuerlig **(b)** differentierbar vid $(0, 0)$.

F.5 **(i)** Skissera kurvan $z = e^{-y^2}$ i yz-planet.

(ii) Låt S vara ytan som man får när man roterar denna kurva runt z-axeln. Skriv en ekvation för S.

(iii) Om S representerar en kulle över xy-planet, på vilken höjd är kullen brantast ?

F.6 En C^2-funktion $f(x, y)$ som satisfierar den så kallade *Laplace ekvationen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0, \tag{1}$$

kallas för en *harmonisk funktion.*

(i) Skriv Laplace's ekvation i cirkulära koordinator.

(ii) Visa att om $f(x, y)$ är harmonisk, då också är

$$g(x, y) := f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right). \tag{2}$$

(iii) Låt $u(x, y)$ och $v(x, y)$ vara C^2 funktioner och antag att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

(dvs, u och v satisfierar de så kallade *Cauchy-Riemann ekvationerna*). Visa att u och v är harmoniska.

(iv) Låt $z = x + iy$, där $i^2 = -1$, och betrakta funktionen $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, där

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{z}. \tag{4}$$

Skriv $f(z)$ i formen $u(x, y) + iv(x, y)$, och visa att funktionerna u och v satisfierar de Cauchy-Riemann ekvationerna.

F.7 En funktion $f(x, y)$ kallas för *homogen av grad r* om

$$f(kx, ky) = k^r f(x, y), \qquad \text{för alla } k > 0. \tag{5}$$

(i) För var och en av följande funktioner f, visa att f är homogen, och bestäm graden.

(a) $f(x,y) = x^2(\ln x - \ln y)$
(b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(c) $f(x,y) = \sin(\frac{y}{x})$.

(ii) Kontrollera att var och en av dessa funktioner satisfierar den så kallad *Euler ekvationen*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = rf. \tag{6}$$

(iii) Bevisa att varje C^1 funktion $f(x,y)$ som är homogen av grad r uppfyller (6).

(iv) Bevisa motsatsen av **(iii)**, dvs bevisa att om f är C^1 och uppfyller (6), då är f homogen av grad r.

(v) Bevisa att om f är C^1 och homogen av grad r, då är $\frac{\partial f}{\partial x}$ homogen av grad $r-1$.

F.8 För var och en av följande funktioner **(i)** bestäm och klassificera dess stationära punkter **(ii)** approximera f vid den givna punkten med en Taylor expansion av ordning 2 :

(a) $f(x,y) = x + y - \frac{1}{xy}$ $\quad f(1.1, 1.1)$
(b) $f(x,y) = e^{x^3+y^3}$ $\quad f(0.1, 0.1)$.

F.9 **(i)** Visa att sabandet $x = u^3 - uv$, $y = 3uv + 2v^2$ definierar u och v som funktioner av x och y i en omgivning av $(u,v,x,y) = (-1,2,1,2)$.

(ii) Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ i punkten $(1,2)$.

***F. 10** Ge ett exempel av en differentierbar funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vars derivata inte är kontinuerlig vid $x = 0$.

***F. 11** Ge ett exempel av en C^∞ funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ så att $f^k(0) = 0$ för alla $k \geq 0$, men $f(x) \neq 0$ för alla $x \neq 0$.

F. 12 En C^1-funktion $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kallas för en *(algebraisk) morphisme* om varje f_i är ett polynom i n variabler.

En morphisme f kallas för en *isomorphisme* om f är bijektiv och dess invers f^{-1} är också en morphisme.

(i) Visa att om f är en isomorphisme, då ar Jac$[f]$ en konstant, icke-noll funktion.

****(ii)** Bevisa motsatsen.

* betyder att övningen är (enligt min åsikt) lite svårare.

** betyder att problemet är olöst, dvs om du löser den, du kan strunta i resten av kursen och får din Ph.D. omedelbart !