MAN 030 : Hösten 99
Inlämningsuppgift 2
(att lämnas in senast 21/10/99)

OBS! Många av följande öningar är ganska svåra, svårare än vad ni ska se på tentan eller i boken. Lös så många du kan. Det är meningen att de blir en utmaning. Det behövs inte lösa allting för att kunna få bonuspoäng.

F.1 Vilka av följande följder av reella tal konvergerar. Om följden konvergerar, hitta gränsvärdet. Motivera alla dina slutsatser :

(a) $x_n =$ den n^{te} siffran i den decimala utvecklingen av π.
**** **(b)** $x_n = \frac{\lambda(n)}{n}$, där $\lambda(n) =$ antal 9'ar bland de första n siffror i den decimala utvecklingen av π.
(c) $x_n =$ antal olika prim som dividerar det naturliga talet n.
* **(d)** $x_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ (ledning).
* **(e)** $x_n = \frac{\tan(n)}{n}$.
*** **(f)** $x_n = \frac{1}{n^{3/4}} |\pi(n) - \frac{n}{\ln(n)}|$, där $\pi(n) :=$ antal prim $\leq n$.
* **(g)** $x_0 = 2.1,\ x_n = \frac{x_{n-1}^2 - 6}{2x_{n-1} - 5}$ för alla $n > 0$ (ledning).

F.2 Ge ett precist bevis att $\lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$, dvs för varje $\epsilon > 0$ bestäm en $N_\epsilon >> 0$ så att $|k^{1/k} - 1| < \epsilon$ för alla $k > N_\epsilon$.

F.3 Låt $\{U_\lambda\}$ vara en samling av bågvis sammanhängande delmängder till någon $\mathbf{R}^n$. Antag att $\cap U_\lambda \neq \phi$. Visa att $\cup U_\lambda$ är bågvis sammanhängande.

F.4 Övning 5, avsnitt 1.3 i GLO.

F.5 Beskriv en kontinuerlig bijektion $f : X \to Y$ för följande par mängder (X, Y).

(a) $X = (0, 1)$, $Y = (-1, 1)$.
(b) $X =$ det högra halva planet, $Y =$ det öppna enhets skivan.

F.6 (i) Förklara varför det finns ingen kontinuerlig injektion från den slutna enhets kvadraten i $\mathbf{R}^2$ till den slutna enhets intervallen i $\mathbf{R}$ (obs! Det finns kontinuerliga bijektioner i den andra riktningen !!!, de så kallade *space-filling curves*).
*** (ii)** Använd den Jordan Curve Theorem för att bevisa att det finns ingen kontinuerlig bijektion från en sluten annulus till en sluten skiva (jämför detta resultat med den Riemann Mapping Theorem).

F.7 Låt X vara en mängd och $f : X \to X$ en funktion. En punkt $x \in X$ kallas för en *fixerad punkt (eng.: fixed point)* till f om $f(x) = x$.

Visa att varje kontinuerlig funktion $f : X \to X$ har minst en fixerad punkt där

(a) $X = [-1, 1]$ (ledning).
**** (b)** $X =$ den slutna enhets skivan i $\mathbf{R}^2$.

F.8 (Titta i boken, exempel 9, s. 36 för lämpliga definitioner). Låt A, B vara två delmängder till samma $\mathbf{R}^n$. Visa att $\{x \in \mathbf{R}^n : d(x, A) = d(x, B)\}$ är en sluten delmängd till $\mathbf{R}^n$.

F.9 (i) Låt $f(0, 1) \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig injektion. Visa att f har en kontinuerlig utvigning till $[0, 1]$.
(ii) Kan vi dra samma slutsats om f inte är injektiv ?

F. 10 Låt A, B vara delmängder till samma $\mathbf{R}^n$. Visa att

(a) $(A \cup B)^- = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(b) $(A \cap B)^- \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

(c) Ge ett exempel som visar att vi får inte alltid likhet i **(b)**.

F. 11 Identifiera $M_n(\mathbf{R})$ med $\mathbf{R}^{n \times n}$ som i exempel 8, s. 35. Vilka av följande delmängder till $M_2(\mathbf{R})$ är bågvis sammanhängande :

(a) $\{A : \det(A) \neq 0\}$.

(b) $\{A : \det(A) \geq 0\}$ (ledning).

*** (c)** $\{A : \det(A) > 0\}$.

F. 12 Bevisa att en sammansattning av två likformligt (resp. Lipschitz) kontinuerliga funktioner är likformligt (resp. Lipschitz) kontinuerlig.

F. 13 Bevisa generaliseringen av medelvärdesatsen på s. 52 i boken genom att betrakta funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ där

$$g(t) = f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) - t(f(\vec{x}) - f(\vec{y})). \tag{1}$$

Det ska bli några övningar till, särskilt om likformilga funktioner, men just nu är jag för trött att tänka mer.

Ledning : betyder att du kan anhålla mig om en ledning, men i detta fall får du max. 50 procent på övningen.

***** betyder att övningen är (enligt min åsikt) lite svårare. Notera att övningar med ledning kan också bli svårare utan ledningen.

****** betyder att problemet är löst, men ingen 'elementär' lösning är känt.

******* betyder att problemet är olöst, dvs ... (som förut) !

******** betyder att jag vet inte om problemet är löst, men skulle inte bli överraskad om det är inte.