MATEMATIK Dag : 991028 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty Vakt : Petter Bränden 0740-479626.

**Tentamenskriving i Flervariabelanalys del 1 (MAN 030)**

**1.** Betrakta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad (1)$$

**(a)** Skriv formuler för $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ i en godtycklig punkt $(x,y) \neq (0,0)$.
**(b)** Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
**(c)** Bevisa att båda partiella derivator är kontinuerliga i $(0,0)$.
**(d)** Deducera att $f$ är $--------$ i $(0,0)$ (fyll i det korrekta ordet).

**2 (a)** Låt $P$ vara mängden av alla punkter $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ på samma avstånd från ytorna $x^2+y^2+z^2 = 1$ och $x^2-2x+y^2+2y+z^2+2z = -\frac{5}{2}$. Visa att $P$ är ett plan och bestäm dess ekvation.
**(b)** Hitta alla punkt(er) på ytan $x^3+y^3-4z^3-3xy^2+3zy^2 = 27$ där tangentplanet är parallell med $P$.

**3.** Formulera och bevisa en sats om likhet av vissa blandade partiella derivator av en reellvärd funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ som satisfierar ett visst villkor.

**4.** Låt $f_1, f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vara följande avbildningar :

$$f_1(x,y) = [\ \ln(x^2+y^2),\ e^x \sin y\ ]$$
$$f_2(x,y) = [\ (\cos x)(1+y+e^x),\ 2x+y^4-3\cos(xy)\ ]$$
$$f_3(x,y) = x^3+y^3+3x^2y^2.$$

Sätt $g = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.
**(a)** Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x}$ och $\frac{\partial g}{\partial y}$ i $(1,0)$.
**(b)** Alltså, uppskatta $g(1.1, 0.1)$ med en lämplig linjär approximation.

**5 (a)** Visa att ytan

$$x^3 e^{yz} + 2x^2z^2(1+y^2) = 0 \quad (2)$$

kan, i närheten av $(-2,0,1)$, skrivas som $y = y(z,x)$.
**(b)** Beräkna $\frac{\partial y}{\partial z}$ och $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ i $(-2,0,1)$.

**6 (a)** Definiera termerna *sluten* och *begränsad* för en delmängd till någon $\mathbf{R}^n$.
**(b)** Formulera det *supremumaxiomet* i $\mathbf{R}$, med definitioner av alla terminologin.
**(c)** Bevisa att om $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig och $D$ är kompakt, då är $f(D)$ kompakt.
**(d)** Förklara varför det följer att en kontinuerlig reellvärd funktion på en kompakt mängd antar ett störst och minst värde.

**7 (a)** Varför måste funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ antar ett störst och minst värde på ytan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ?
**(b)** Bestäm dessa värde.
**(c)** Antar $f$ ett störst värde på ytan $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$ ? Förklara.

**8.** För var och en av följande par $D_i, S_i$ av mängder, avgör vilka av följande stämmer :

(i) Det finns en kontinuerlig bijektion $f : D_i \to S_i$.
(ii) Det finns en kontinuerlig surjektion $f : D_i \to S_i$ men ingen bijektion.
(iii) Det finns ingen kontinuerlig surjektion $f : D_i \to S_i$.

I fall (i), beskriv en bijektiv $f$. I fall (ii), beskriv en surjektiv $f$ och förklara varför $f$ kan inte väljas bijektiv. I fall (iii), förklara varför det finns ingen sådan $f$.

**(a)** $D_1 =$ den slutna triangeln med vertices $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$.
$S_1 =$ den slutna kvadraten med vertices $(\pm 1, 0), (\pm 1, 1)$.

**(b)** $D_2 = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$. $S_2 = \{(x, y) : x^2 > y^2\}$.

**(c)** $D_3 = [0, 1)$ $S_3 = (0, 1)$.

**Obs!** Fråga **8** är värd 4 poäng. Alla andra frågor är värda 3 poäng.
$\geq 12$ poäng ger godkännt. Denna gräns kan avtagas om resultaten är låga.

Tentan beräknas vara färdigrättad den 1 november. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas ut också telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.