Tentamenskrivning i Flervariabelanalys (del 1) 99-10-28 : Lösningar

F.1 (a) Det kvotet regeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \tag{1}$$

och en liknande formul för $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(b) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4/h^2}{h} = 0.$$

På samma sätt, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ också.
(c) Vi måste visa att funktionen i (1) går mot 0 när $(x,y) \to (0,0)$. I polära koordinator, denna funktion blir $2r\cos\theta(\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta)$ som går klart mot 0 när $r \to 0$.
(d) Delar (b) och (c) visar att f är C^1 i $(0,0)$ och vi kan deducera, enligt Sats 2.3 i PB, att f är *differentierbar* där.

F.2 (a) Dessa är två sfär av radie 1 och $\frac{1}{\sqrt{2}}$ med centrum i $A = (0,0,0)$ och $B = (1,-1,-1)$ respektivt. Alltså, de två sfären skärnar inte varandra. Då är mängden P lika med mängden av alla punkter på samma avstånd från A och B, dvs ett plan genom $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ med normal vektor $\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$. Alltså är P's ekvation $x - y - z - \frac{3}{2} = 0$.
(b) Vi söker alla punkter på ytan där gradienten är parallell med $\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, dvs alla lösningar på ytan till ekvationsystemet

$$3x^2 - 3y^2 = -(3y^2 - 6xy + 6zy) = -(-12z^2 + 3y^2). \tag{2}$$

Man kontrollerar att de lösningar till (2) består av alla multipler av de vektorerna $(0,1,0), (2,2,1)$ och $(-2, -\frac{2}{3}, 1)$. Då kontrollerar man att, bland dessa, finns det två punkter som satisfierar ytans ekvation, nämligen $(0,3,0)$ och $-\frac{9}{2\sqrt[3]{28}}(-2, -\frac{2}{3}, 1)$.

F.3 Sats 2.9 i PB.

F.4 **(a)** Notera att $f_1(1,0) = (0,0)$, $f_2(0,0) = (2,-3)$ och $f_3(2,-3) = 89$. Då är $g(1,0) = 89$ och

$$\text{Jac}[g](1,0) = \text{Jac}[f_3](2,-3) \cdot \text{Jac}[f_2](0,0) \cdot \text{Jac}[f_1](1,0). \tag{3}$$

Då beräknar man att $\text{Jac}[f_3](2,-3) = (120 \quad -45)$, $\text{Jac}[f_2](0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $\text{Jac}[f_1](1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. Sätt dessa in i (3) och du får att $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y}\right)|_{(1,0)} = (60 \quad 120e)$.

(b) Vi använder uppskattningen

$$g(1.1, 0.1) \approx g(1,0) + (0.1)\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + (0.1)\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 95 + 12e.$$

F.5 **(a)** Låt ytan kallas för $f = 0$. Den beskriver $y = y(z,x)$ i närheten av $(-2,0,1)$ eftersom $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,0,1) = -8 \neq 0$.

(b) Om man differentierar $f = 0$ implicit med avseende på z får man

$$x^3(z\frac{\partial y}{\partial z} + y)e^{yz} + 4x^2 z(1+y^2) + 4x^2 z^2 y \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

som ger $\frac{\partial y}{\partial z}(-2,0,1) = 2$. På samma sätt, om man differentierar $f = 0$ med avseende på x får man att $\frac{\partial y}{\partial x}(-2,0,1) = \frac{1}{2}$. Nu differentiera (4) med avseende påx och man får äntligen att $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}(-2,0,1) = \frac{3}{2}$.

F.6 Titta i GLO, kap. 1 för den lämpliga materialen.

F.7 **(a)** Ty ytan är kompakt.

(b) Om man skriver $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}[(x_1+x_2+x_3)^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2)]$, ser man omedelbart att $f_{\text{min}} = -\frac{1}{2}$, och antas i skärningen mellan sfäret och planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. För att hitta f_{max}, använder vi Lagrange multiplikatorer, som ger systemet

$$x_2 + x_3 = 2\lambda x_1 \tag{5}$$

$$x_1 + x_3 = 2\lambda x_2 \tag{6}$$
$$x_1 + x_2 = 2\lambda x_3 \tag{7}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{8}$$

(5) + (6) + (7) $\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2\lambda(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (som ger det minsta värdet) eller $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, och $f\text{max} = f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = 1$.
(c) Nej. Punkten $(k, k, 1)$ ligger på ytan för alla $k \in \mathbf{R}$, och $f(k, k, 1) = k^2 + 2k \to \infty$ när $k \to \infty$.

F.8 **(a)** Fall (i) : en kontinuerlig bijektion f beskrivs nere.

(b) Fall (iii) : D_2 är sammanhängande men det är S_2 inte.
(c) Fall (ii) : Det finns ingen bijektiv f ty en sådan f skulle skicka den sammnhängande mängden $D_3 - \{0\}$ kontinuerligt till den osammanhängande mängden $S_3 - \{f(0)\}$.

Här är ett exempel av en surjektiv, kontinuerlig funktion : f är 'piecewise linear' och, för alla $n \in \mathbf{N}$,

$$f(1 - \frac{1}{n}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ odd.} \\ 1 - \frac{1}{n+1}, & n \text{ even.} \end{cases}$$