MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Peter Hegarty

Dag : 000105 Tid : 8.45 - 13.45.
Hjälpmedel : Inga
Vakt : Sebastian Sandberg 0740-479626.

Tentamenskriving i Flervariabelanalys del 1 (MAN 030)

1. Hitta alla par (a, b) av reella tal så att det finns en punkt där ytan $x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz = b$ tangerar planet $x + 2y + az = 13$.

2. Låt $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ och $g = (g_1, ..., g_p) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ vara C^1-funktioner. Formulera och bevisa den så kallade kedjeregeln för de partiella derivatorna av den sammansattningen $h = g \circ f = (h_1, ..., h_p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$.

3. Ange den allmäna lösningen till den diffekvationen

$$z_{xx} - z_{yy} = z_x - z_y \tag{1}$$

genom att införa de nya variablerna $(u, v) := (x + y, x - y)$.

4 (a) Visa att sambandet $u = \sin x + e^y$, $v = e^{\cos x} + \cos(xy)$ definierar x och y som C^1-funktioner av u och v i närheten av $((x, y, u, v) = (\pi/2, 0, 2, 2)$.
(b) Beräkna $\frac{\partial x}{\partial u}(2, 2)$.

5 (a) Varför måste funktionen $x^3 + y^3 + 2z^3$ anta ett störst och minst värde i snittet av ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 4$?
(b) Bestäm dessa värde.

6 Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^3} dx \tag{2}$$

genom att betrakta en lämplig integral $F(s) = \int_0^1 f(s, x) dx$ och dess s-derivator.

7 (a) För en följd (x_k) av reella tal, ge precisa definitioner av termerna *monoton, begränsad, Cauchy, konvergent.*
(b) Bevisa att varje oändlig följd av reella tal har en oändlig monoton delföljd.
(c) Bevisa nu att en följd av reella tal konvergerar om och endast om den är Cauchy. (Ge en precis formulering av varje andra sats som du använder

utan bevis).

8 (a) För var och en av följande par D_i, S_i av mängder, avgör om det finns en kontinuerlig surjektion f från D_i till S_i. Beskriv i detta fall en sådan f ; annars, förklara varför ingen sådan f existerar.

(i) $D_1 = \{(x, y) : x^2 - y^2 > 1\}, \quad S_1 = \{(x, y) : y > 0\}$.
(ii) $D_2 = S_1, \quad S_2 = D_1$.

(b) För var och en av följande par D_i, S_i av delmängder till $\mathbf{R}^2$, avgör om det finns en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sådan att $f^{-1}(S_i) = D_i$. Antingen beskriv en sådan f eller förklara varför ingen sådan f existerar.

(i) $D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad S_3 = S_1$.
(ii) $D_4 = \{(x, y) : y = 2x,\ x \text{ rationellt}\}, \quad S_4 = \{(x, y) : y = x\}$.

Obs! Fråga **8** är värd 4 poäng. Alla andra frågor är värda 3 poäng.
$\geq$ 12 poäng ger godkännt. Denna gräns kan avtagas om resultaten är låga.

Tentan beräknas vara färdigrättad den 10 januari. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas ut också telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.