Tentamenskrivning i Flervariabelanalys (del 1) 00-01-05 : Lösningar

F.1 I en punkt där de ytorna tangerar varandra är deras normaler parallella. Då finns det $\lambda \in \mathbf{R}$ så att

$$(2x + y, 2y - z + x, -2z - y) = \lambda(1, 2, a). \tag{1}$$

Man löser för x, y, z i termer av λ, a och får

$$x = \frac{\lambda}{8}(1 + a) \tag{2}$$

$$y = \frac{\lambda}{4}(3 - a) \tag{3}$$

$$z = -\frac{3\lambda}{8}(1 + a) \tag{4}$$

Substituera i de ekvationer till de två ytorna och får du

$$b = 4\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 (13 - 6a - 3a^2) \tag{5}$$

$$13 = \frac{\lambda}{8}(13 - 6a - 3a^2) \tag{6}$$

(5) och (6) ger lösningskurvan

$$b(13 - 6a - 3a^2) = 676. \tag{7}$$

F.2 Sats 2.4 eller 3.1 i PB. Ett kort bevis av Sats 3.1 finns i mitt sammandrag av kursen, s. 19 (på kurshemsidan).

F.3 Använd kedjeregeln för att skriva om ekvationen i termer av u och v och får du

$$z_{uv} = \frac{1}{2} z_v. \tag{8}$$

Lös som en 1:a-ordning ekvation till z_v och får du

$$z_v = \phi(v)e^{\frac{1}{2}u}. \tag{9}$$

Integrera nu med avseende på v och får du den allmäna lösningen

$$z(x,y) = \phi_1(x-y)e^{\frac{1}{2}(x+y)} + \phi_2(x+y), \tag{10}$$

där ϕ_1 och ϕ_2 är (godtyckliga) differentierbara funktioner av en variabel.

F.4 Beräkna direkt att i den givna punkten,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{11}$$

Den invers matrisen är $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ så att $\frac{\partial x}{\partial u}(2,2) = 0$.

F.5 (a) Båda ytor är kompakta, alltså gäller detsamma deras skärning. Och funktionen $x^3 + y^3 + 2z^3$ är kontinuerlig.
(b) Den lättatse metoden är att se direkt att $x = 3/2$ i skärningen mellan de två ytorna så att problemet reducerar till att maximisera/minimisera $y^3 + 2z^3$ med bivillkoret $y^2 + z^2 = 7/4$. Använd Lagrange multiplikatorer och får de två extra ekvationerna

$$3y^2 = 2\lambda y \qquad 6z^2 = 2\lambda z. \tag{12}$$

Det finns tre fall : (i) $y = 0$ (ii) $z = 0$ (iii) $y \neq 0$ och $z \neq 0$.
Dessa tre fall ger respektivt de kandidat punkterna $(3/2, 0, \pm\sqrt{7}/2)$, $(3/2, \pm\sqrt{7}/2, 0)$ och $(3/2, \pm\sqrt{\frac{7}{5}}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}})$.

Om man beräknar funktionens värde i var och en av dessa punkter ser man att max. antas i punkten $(3/2, 0, \sqrt{7}/2)$ och min. i punkten $(3/2, 0, -\sqrt{7}/2)$.

F.6 Låt integralen kallas för I. Betrakta

$$F(s) = \int_0^1 \frac{1}{s^2 + x^2}\,dx. \tag{13}$$

Man beräknar direkt att $F(s) = \tan^{-1}(1/s)$ så att $F'(s) = -1/(s^2+1)$ och $F''(s) = 2s/(s^2+1)^2$.

Å andra sidan, differentation under integral tecken ger

$$F'(s) = \int_0^1 \frac{-2s}{(s^2+x^2)^2}\,dx \tag{14}$$

$$F''(s) = \int_0^1 \left(\frac{-2}{(s^2+x^2)^2} + \frac{8s}{(s^2+x^2)^3} \right) dx. \tag{15}$$

Från (14) och (15) ser man att

$$I = \frac{1}{8}\left[F''(1) - F'(1)\right]. \tag{16}$$

Substituera $s = 1$ i de explicita formulerna ovan och får du att $I = 3/32$.

F.7 (a) Allting finns i GLO, kap. 1.

F.8 (a) (i) en kontinuerlig surjektion existerar. Till exempel, gör följande : D_1 består av två öppna sammanhängande delar A, B i det vänstra och högra halv planet resp. Vi beskriver en avbildning av B på S_1 ; då kan du avbilda A till en punkt i S_1, till exempel.

Börja med en kontinuerlig surjektion $\phi : (1, \infty) \to (-\infty, \infty)$, t.ex. genom den sammansattningen

$$(1,\infty) \overset{x \mapsto x-1}{\to} (0,\infty) \overset{x \mapsto \tan^{-1} x}{\to} (0, \frac{\pi}{2}) \overset{x \mapsto 2(x-\frac{\pi}{4})}{\to} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \overset{x \mapsto \tan x}{\to} (-\infty, \infty). \tag{17}$$

För varje $x_0 \in (1, \infty)$ innehåller B en vertikal linje segment med x-koordinat x_0. För att avbilda B på D_1, avbildar man den vertikal segmenten vid x_0 på den öppna halv-linjen $L_0 = \{(\phi(x_0), y) : y > 0\}$ genom en avbildning som liknar, i varje fall, ϕ. Det behövs inte ge flera detaljer.

(ii) ingen kontinuerlig surjektion existerar eftersom D_2 är s.h. men S_2 inte är det.

(b) (i) En sådan f existerar. Till exempel

$$f(x, y) = (0, 1 - x^2 - y^2). \tag{18}$$

(ii) Ingen sådan f existerar eftersom S_4 är sluten i $\mathbf{R}^2$ men D_4 inte är det.