1. Dimensionsbegreppet

Kanske den allra viktigaste geometriska egenskapen av vår värld är att den är (eller mer precis, vi uppfattar den som så) 3-dimensionellt. Vi vet alla intuitivt vad detta betyder, men kan vi specificera dess innebörd mer precis ?

Diskussion om detta

Eftersom vi kan uppfatta tre dimensioner, så kan vi a fortiori uppfatta två eller bara en dimension som abstrakta konstruktioner (mer precis, som *projektioner* av den tre-dimensionella verkligheten). Ska vi bygga upp våra geometriska begrepp från de enklaste till de svårare, är det däremot bättre att gå åt andra hållet.

En Dimension

I en dimension har vi begreppen *längd* och *avstånd*. För att kunna uttrycka längder av sträckor så behövs två saker :
(i) en längdenhet som alla är överens om
(ii) ett talsystem.

Talsystemet ska vara tillräckligt omfattande så att varje tänkbart längd motsvarar ett unikt tal i detta system. Det talsystem vi använder i detta sammanhang är systemet av *(positiva) reella tal*. Sammanfattningsvis, i en dimension :

$$\text{Längder} \leftrightarrow \text{Positiva reella tal}$$

Dikussionsfråga : Är en cirkel ett 1-dimensionellt eller 2-dimensionellt objekt ?

Två Dimensioner

Nu har vi begreppet *area*. Enheten för areor är en kvadrat vars sidolängd är enheten för längder. Därmed finns det en enkel formel för arean av en godtycklig rektangel i termer av dess sidolängder, nämligen :

$$\text{Arean av en rektangel} = \text{Produkten av dess sidolängder.}$$

En konsekvens av detta är att om vi t.ex. dubblerar längden av varje sida i en rektangel så kommer dess area att fyrdubblas. Mer allmänt :

Om längden av varje sida i en rektangel ökas med en faktor α så kommer dess area att öka med en faktor $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.

Låt oss kalla denna princip för $\mathcal{S}$, eller *skalningsprincipen.* Den viktiga observationen är att denna princip kan utvidgas till alla 2-dimensionella former, oavsett deras utseende. Det är egentligen vad som karakteriserar ett 2-dimensionellt objekt. Vi kan formulera den 2-dimensionella skalningsprincipen så här :

Om en 2-dimensionell geometrisk figur sträckas med samma faktor α i alla riktningar, så kommer dess area att öka med en faktor α^2.

För att kunna förstå principen måste vi också tänka oss vad menas exakt med arean av figurer som är mer komplicerade än kvadrater. Vi kan få en uppfattning av areabegreppet för allmänna 2-dimensionella figurer genom följande trestegsprocess :

1. Formeln för arean av en kvadrat $\Rightarrow$ formeln för arean av en triangel.
2. Arean av en figur vars rand består av ihopsatta raksträckor (ett s.k. *polygon*) kan beräknas genom att dela upp figuren i triangler (s.k. *triangulering*).
3. Arean av en allmän figur kan uppskattas genom att täcka den med ett polygon. Ju närmare det täckande polygonet passar till själva figuren desto bättre blir uppskattningen av figurens area.

Randen till en 2-dimensionell figur uppfattas intuitivt som 1-dimensionellt och därmed har en längd, som kallas för figurens *omkrets.*

Möjligt diskussionsämne : *Fraktaler* är 2-dimensionella figurer med oändlig omkrets men ändlig area. Hur kan detta vara möjligt ? Finns det sådana figurer i verkligheten ?

Fråga : Hur mätar man avstånd i två dimensioner ?

Tre och högre Dimensioner

I tre dimensioner har vi begreppet *volym.* Volymenheten är en kub vars sidolängd är lika med längdenheten. Direkt från detta följer att

Volymen av en rätblock = Produkten av dess sidolängder = Längd $\times$ Bredd $\times$ Höjd

Skalningsprincipen i tre dimensioner lyder

Om en 3-dimensionell figur sträckas med en faktor α i alla riktningar, så ökar dess volym med en faktor $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$.

Låt d vara ett heltal större än 3. Trots att vi inte kan visualisera d dimensioner så kan vi tänka på det i liknande termer som vi redan gjort i 1,2 och 3 dimensioner. Hur skulle skalningsprincipen lyda i d dimensioner ?

Koordinatsystem

För att otvetydigt beskriva positionen av en punkt i ett rum, utan att peka direkt på den, så måste vi först ha någon referenspunkt eller s.k. *origo.* I en dimension motsvaras varje punkt på en linje av ett unikt reellt tal m.a.p. en utvald origo. Notera att vi måste nu använda både positiva och negativa tal för att skilja åt punkter på olika sidor av origon. Avståndet mellan en punkt och origon är lika med *absolutbeloppet* av talet som beskriver punktens position.

I två dimensioner så behöver vi ange två reella tal för att bestämma en position, i tre dimensioner behöver vi tre st. Dessa tal kallas för en positions *(Kartesiska) koordinator.*

Nu har vi äntligen en rätt så bra formell definition av begreppet *dimension.* Att vår värld är (?) 3-dimensionellt innebär att varje position kan entydigt beskrivas med tre reella tal, nämligen dess Kartesiska koordinator m.a.p. utvalda origo och koordinataxlar.

Diskussionsfråga : Om en sfär är 2-dimensionellt så borde det gå att beskriva varje punkt på sfären med två reella tal. Hur gör man det ?

Användandet av koordinator underlättar att uttrycka geometriska satser i termer av algebraiska formler. Nya satser kan i sin tur ofta lättare tas fram genom algebraiska manipulationer snarare än rent visuella verktyg.

Hur kan avståndet mellan två punkter i vår 3-dimensionella värld uttryckas i termer av punkternas koordinator ? Vilken geometrisk sats används här ?

Ett exempel : Volymen av en pyramid

2. Cirklar och vinklar

DEFINITION : En cirkel är en punktmängd som består av alla punkter i ett plan på ett givet avstånd från en given punkt. Punkten i fråga kallas för cirkelns *medelpunkt* och avståndet i fråga för cirkelns *radie*.

Förhållendet mellan omkretsen och diametern av en cirkel är densamma för alla cirklar och kallas för π. π är alltså ett positivt reellt tal s.a. förhållendet

$$\pi = \frac{\text{Cirkelns omkrets}}{\text{Cirkelns diameter}}$$

gäller för varje cirkel.

I vanligt språk så slarvar man ofta och betecknar också med ordet 'cirkel' det område som omskrivas av en cirkel. Det är mer korrekt att kalla ett sådant område för en *skiva*.

PROPOSITION : Arean av en skiva med radie r är πr^2. Med ord,

$$\text{area av en skiva} = \pi \times \text{radien} \times \text{radien}.$$

'BEVIS' :

I tre dimensioner så kallas en punktmängd bestående av alla punkter på ett givet avstånd från en given punkt för en *sfär*. Det inneslutna område inom en sfär kallas för en *klot* eller en *boll*. Det var antagligen först Grekerna (Archimedes ?) som bevisade följande :

PROPOSITION : Arean av en sfär med radie r är $4\pi r^2$. Volymen av det inneslutna klotet är $\frac{4}{3}\pi r^3$.

'BEVIS' :

Vinklar och trigonometri

En vinkel är något som vi alla uppfattar intuitivt. Men hur mätar vi dem ?

En vinkel kan mätas i termer av längder. Rita upp en cirkel med radie 1. En vinkel med hörn i cirkelns medelpunkt skär cirkeln i två punkter.

Vinkelns storlek, mätt i *radianer*, är längden av cirkelbågen mellan dessa två punkter (förtydligande behövs här !).

Detta medför att ett helt varv är 2π radianer (varför ?). I matematik så mätas alla vinklar i radianer. Av historiska skäl så mätas också vinklar i termer av *grader*. I det systemet så är ett helt varv lika med 360 grader. Detta innebär att

$$\begin{aligned} 360 \text{ grader} &= 2\pi \text{ radianer} \\ \Leftrightarrow 1 \text{ radian} &= \tfrac{180}{\pi} \text{ grader} \approx 57{,}296 \text{ grader} \\ \Leftrightarrow 1 \text{ grad} &= \tfrac{\pi}{180} \text{ radianer} \approx 0{,}017 \text{ radianer.} \end{aligned}$$

Exempel : När en vinkel är liten så är cirkelbågen som skärs av av vinkeln ungefär lika lång som raksträckan mellan de två skärningspunkterna. Med tanke på detta så kan vi ibland använda vinklar för att mäta avstånd.

De trigonometriska funktionerna

Låt θ vara en spetsig vinkel, mätt i radianer[1]. Rita upp en cirkel med radie 1 och stoppa in vinkeln med dess hörn i cirkelns medelpunkt.

BILD

$\cos\theta$ och $\sin\theta$ är nu, per definition, längderna av sträckorna AC resp. AD.

Diskussion om definitionen av $\cos\theta$ och $\sin\theta$ för icke-spetsiga vinklar θ ....

Om vi väljer ett koordinatsystem där origon är cirkelns medelpunkt och ena benet av vinkeln sammanfallar med den positiva x-axeln så är cosinus och sinus av vinkeln helt enkelt lika med x- resp. y-koordinatorna av skärningspunkten mellan cirkeln och vinkelns andra ben (förtydligande behövs här !).

De trigonometriska funktionerna dyker upp i många formler i den *analytiska geometrin*, dvs den approach till geometri där man använder koordinatsystem och därmed försöker uttrycka geometriska fakta i termer av algebraiska formler. Till exempel, faktumet att för varje vinkel θ så gäller att

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

är en omformulering av en sats som ni känner till. Vilken ?

[1]Det är väldigt vanligt i matematiska texter att beteckna vinklar med grekiska bokstäver, en hyllning till de som uppfann trigonometri antagligen.

3. Trianglar

Vi har sett tidigare hur trianglar är på något sätt de 'grundläggande formerna' från vilka alla 2-dimensionella figurer kan byggas upp. Vi ska nu ägna mer tid åt att studera dem.

En triangel har tre sidor och tre inre vinklar. Om sidornas längder betecknas a, b och c så är det konventionellt att beteckna vinklarna med A, B och C där vinkeln A är den som står tvärsemot sidan a osv.

DEFINITION : Två trianglar sägs vara *kongruenta* om den ena kan förflyttas så att den passar perfekt med den andra. M.a.o. de är samma triangel men har bara ritats på olika ställen eller med olika orienteringar. Kongruenta trianglar har alltså samma sidolängder och samma vinklar.

En triangel har 6 parametrar (dess tre sidolängder och dess tre vinklar). Men hur många av dessa är överflödiga ? M.a.o. hur många av dessa parametrar kan två trianglar dela utan att vara kongruenta ? Svaret är inte många. Följande tre karakteriseringar av kongruenta trianglar kommer från Euklides :

(I) Om två trianglar har samma tre sidolängder då är dem kongruenta.
(II) Om två trianglar har två gemensamma sidolängder, och dessutom om de har samma vinkel mellan dessa två sidor, då är dem kongruenta.
(III) Om två trianglar har två gemensamma vinklar och dessutom om de har samma sidolängd mellan dessa vinklar, så är dem kongruenta.

Om två trianglar har tre gemensamma vinklar så behöver dem inte vara kongruenta, men den ena är bara en skalning av den andra. Sådana triangelpar sägs vara *likformiga*.

PROPOSITION : Summan av de tre vinklarna i en triangel är alltid π radianer, dvs 180 grader, dvs ett halvt varv.

BEVIS :

Denna proposition medför att det räcker för att två trianglar ska vara likformiga att de har två gemensamma vinklar. Varför ?

Exempel : Likformighet av trianglar kan användas för att mäta avstånd.

Följande sats är en kul illustration av vad kongruens och likformighetsbegreppen kan användas till. Först en definition :

Definition : *Medianen* till en sida i en triangel är raksträckan mellan sidans mittpunkt och triangelns motsatta hörn.

Sats : I varje triangel så möts de tre medianerna i en punkt. (Denna punkt kallas för triangelns *tyngdpunkt* eller *centroid*).

Bevis :

Det finns ett flertal liknande satser, t.ex. de tre vinkelbisektriserna möts i en punkt, och de tre perpendicular bisectors gör detsamma.

Area Formler

Den grundläggande formeln lyder

$$\text{Arean av en triangel} = \frac{1}{2} \times \text{Längden av en sida} \times \text{Motsvarande höjd}$$

Samma formel kan uttryckas i termer av de trigonometriska formlerna så här : låt sidolängderna vara a, b, c och vinklarna A, B, C som vanligt. Då gäller att

$$\text{Arean} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

M.h.a. höjder så kan man också bevisa den s.k. *sinusregeln* för trianglar, som ni kanske känner igen, och som lyder :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Det skulle naturligtvia vara kul att ha en formel för en triangels area bara i termer av dess tre sidolängder, eftersom det är dessa som är enklast att mäta, och som oftast bestäms i förväg. Vi nämnar här en sådan formel, men avstår från att bevisa den. Formeln heter *Herons formel.*

Låt a, b, c vara sidolängderna i triangeln. Sätt

$$s := \frac{1}{2}(a + b + c).$$

s är hälften av triangelns omkrets alltså. Då lyder Herons formel så här :

$$\text{Triangelns area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pythagoras Sats

Denna är kanske den mest allmänt kända satsen i hela matematiken. Den relaterar sidolängderna i en rätvinklig triangel eller, om man vill tänka praktiskt, berättar hur man mätar diagonaler.

Pythagoras Sats : I en rätvinklig triangel så gäller att kvadraten på hypotheneusen är lika med summan av kvadraterna på de två kateterna.

Det finns många många bevis av P.S. i den matematiska litteraturen. Vi nöjer oss med 2 st. Som i de flesta andra bevisen så spelar kongruens och likformighetsbegreppen en central roll.

Bevis 1 :

Bevis 2 :

Anmärkning : P.S. har en generalisering till godtyckliga trianglar, den s.k. *cosinusregeln*, som ni kanske känner igen. Den lyder så här :

Låt en triangel ha sidolängder a, b, c och inre vinklar A, B, C som vanligt. Då gäller att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Bonusuppgift ! Härleda Cosinusregeln från Pythagoras sats.

Exempel : Att mäta jordens omkrets.