1. Uppgifter om dimensionsbegreppet

1. $12 \cdot 3 \cdot 3 = 108m^2$.

2. Den andra sidan av rektangeln är $\frac{3}{2}$ gånger längre än motsvarande sidan av kvadraten.

3. Sidan i den stora kvadraten är $2, \sqrt{5}$ resp. $\sqrt{n}$ ggr längre än i den lilla kvadraten.

4. Klipp och klistra.

5 (i) Den korta sidan är $\frac{1}{1+2}(\frac{18}{2}) = \frac{9}{3} = 3m$, så arean är $3 \cdot 6 = 18m^2$.
(ii) Den korta sidan är $\frac{1}{1+3}(\frac{18}{2}) = \frac{9}{4}m$ så arean är $\frac{9}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{4} = \frac{243}{16} = 15\frac{3}{16}m^2$.
(iii) Den korta sidan är $\sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10m$.

6. En kvadrat. Jag avstår från att skriva ett bevis här, men det kan diskuteras på lektionen.

7. $23 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1472m^3$.

8. B har $\sqrt{9} = 3$ ggr så lång radie som A.

9. $\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{9}$ resp. $\sqrt[3]{n}$.

10. Cylinderytan består av två skivor på toppen och botten plus den kurviga biten. Varenda skiva har area πr^2. Den kurviga biten kan vikas ut till en rektangel med sidor $2\pi r$ och h, och därmed har area $2\pi rh$. Den totala ytaren är därmed

$$2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

Om $r = 10$ och $h = 5$ så blir arean

$$2\pi \cdot 10 \cdot (10 + 5) = 300\pi \text{ kvadratmeter.}$$

11. Den optimala formen är att diametern av basen är lika med höjden. Jag avstår från ett bevis här. Ett fullständigt bevis kräver nog antingen lite kunskaper om differentialkalkyl eller en hel del algebraiska manipulationer. Den som verkligen vill se ett bevis får fråga mig.

12. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Dvs konens volymen är en tredjedel av cylinderns. Faktorn $\frac{1}{3}$ är typisk för spetsiga figurer i tre dimensioner (faktorn blir $\frac{1}{d}$ i d dimensioner). På måndag kommer vi att se ytterligare ett exmpel på detta fenomen när vi jämför ytarean av en sfär med volymen av det inneslutna klotet.

(OBS! För ni som sett integraler förut : att faktorn $\frac{1}{d}$ dyker upp är intimt kopplad till att $\int_0^1 x^{d-1}\,dx = \frac{1}{d}$. Har du ingen aning vad detta betyder så spelar det ingen roll, det är inte nödvändig kunskap för denna kurs !).

13 (i) och (ii) $\sqrt[3]{1/2} = 1/\sqrt[3]{2} \approx 0,7937...$ Dvs man ska fylla glaset eller pyramiden till ca. 79,37 procent. Detta är om spetsen pekar neråt förstås. Om spetsan pekar uppåt så ska man fylla till $100 - 79,37 = 20,63$ procent.

14 (i) Volymen är $\frac{1}{2}$ × längd × bredd × höjd.
(ii) $\sqrt[3]{1,20} \approx 1,0627$ ggr större. Dvs, ca. 6,27 procent större.

2. Uppgifter om cirklar och vinklar

1. Låt cirkelns radie vara 1 (det spelar ingen roll vad du sätter den lika med, eftersom det är bara förhållendena mellan cirkeln och de två kvadraterna som intresserar. Men väljer vi radie 1, så underlättas uträkningarna). Då ska man visa att omkretserna av den inre kvadraten, cirkeln och den yttre kvadraten är resp. $4\sqrt{2}, 2\pi$ och 8. Detta medför att $4\sqrt{2} < 2\pi < 8$ och delar vi allting med 2 så får vi den efterlängtade dubbla olikheten.

2. 3 meter.

3. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{16\pi}{9}$ radianer.

4. Circa $1000 \times 7,2 \times \frac{\pi}{180} \approx 125,66$ ljusår.

5 (i) Triangeln i bilden är liksidig och därmed är längden av sträckan som skärs av av höjden lika med $1/2$.
(ii) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
(iii) 6-hörningen kan delas upp i 6 kongruenta, liksidga trianglar. Varje triangel har sidolängd 1 och därmed area $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Den totala arean är därmed $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. Betrakta en rätvinklig triangel med hypoteneus 1 och ena spetsiga vinkeln lika med θ. $\sin\theta$ är, per definition, längden av den motsatta katetern. Men vinkeln bredvid denna är $\frac{\pi}{2} - \theta$ (ty vinkelsumman i triangeln är π) och därmed är dess längd också lika med $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, per definition.

7. Längden av omloppsbanan, mätt i meter, är circa

$$(93 \times 10^6) \times 1608 \times 2\pi \approx 9,396 \times 10^{11}.$$

Tiden för jorden att avsluta ett helt varv, mätt i sekunder, är circa

$$365,25 \times 60 \times 60 \times 24 = 31557600.$$

Därmed är jordens hastighet, mätt i meter per sekund, circa

$$\frac{9,396 \times 10^{11}}{31557600} \approx 29774 \; ms^{-1}.$$

M.a.o. jorden rör sig i nästan 30 kilometer per sekund. Det är rätt så snabbt, eller ??

3. Uppgifter om trianglar

1. Det går att rita en triangel med tre givna sidolängder om och endast om det största av dessa tre tal är strängt mindre än summan av de andra två. Därmed finns det ingen triangel med sidolängder 1,2 och 3.

Låt nu $a \leq b \leq c$ vara tre givna positiva tal så att $c < a + b$. Hur man kan rita en triangel med dessa sidolängder är så här : först rita en sträcka av längd c. Med passaren rita en cirkel av radie a vars medelpunkt är ena ändpunkten av sträckan ovan, och en annan cirkel av radie b vars medelpunkt är sträckans andra ändpunkt. Dessa två cirklar möts i två punkter. Välj en av dessa till triangelns tredje hörn.

2. Eftersom alla vinklarna måste i så fall vara lika också och vinkelsumman är 180 grader.

3. Rita in höjden. Pythagoras sats innebär att basen delas mitt itu och därmed delas hela triangeln i två kongruenta trianglar (de har samma tre sidolängder). Därför är motsvarande vinklar också lika i de två mindre trianglarna, och därmed är $\alpha = \beta$ ty de svarar mot varandra.

4. Vinkelsumman i en n-hörning är $(n-2)\pi$ eftersom n-hörningen kan delas upp i $n-2$ st trianglar.

5 (i) 4 och 6 meter. **(ii)** $2\frac{1}{2}$ och $3\frac{3}{4}$ meter.

6. Låt x vara avståndet från Anna till huset. Från att jämföra ett lämpligt par av likformiga trianglar så får vi att

$$\frac{5}{5+x} = \frac{1,86}{60}.$$

Efter de lämpliga algebraiska manipulationerna så härleder vi att $x = 156,29032$ meter.

7. Det är inte svårt att övertyga sig (???) att för att minimera den totala längden av hans resa så ska Kalle gå mot den punkt på ån så att de två trianglarna som skapas när man ritar in hans väg är likformiga. Detta leder till att, om den punkt på ån han siktar mot ligger x meter till vänster om hans startpunkt, så ska

$$\frac{x}{1000-x} = \frac{500}{800}.$$

De vanliga algebraiska manipulationerna leder till svaret att $x = \frac{5000}{13} \approx 384,62m$.

8. Sträckarna AO, OC och OB har alla samma längd eftersom var och en är en radie till cirkeln. Därmed är trianglarna AOC och COB likbenta. Detta medför (se uppgift **3**) att

$$\angle A = \angle ACO, \qquad \angle B = \angle BCO.$$

Därmed så är

$$\angle C = \angle ACO + \angle BCO = \angle A + \angle B. \tag{1}$$

Men

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \tag{2}$$

för det är bara vinkelsumman i triangeln ABC. Från (1) och (2) så härleder vi att $\angle C = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$, v.s.v.

9. 24m.

10. Låt a och b vara två godtyckliga heltal med $a < b$. Då gäller att triangeln med sidolängder $b^2 - a^2, 2ab$ och $b^2 + a^2$ är rätvinklig eftersom (det är lite algebra att kolla det !)

$$(b^2 - a^2)^2 + (2ab)^2 = (b^2 + a^2)^2.$$

Eftersom vi kan välja vad som helst för a och b så får vi oändligt många olika trianglar på detta vis. Det är en betydligt svårare uppgift att bevisa att ALLA rätvinkliga trianglar med heltaliga sidolängder fås på det viset !!

11.

$$\begin{aligned} 11^2 < 137 &< 12^2, \\ (11,7)^2 < 137 &< (11,8)^2, \\ (11,70)^2 < 137 &< (11,71)^2, \\ (11,705)^2 &> 137. \end{aligned}$$

Så $\sqrt{137} = 11,70$ till två decimalsiffror.

12. $x = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} \approx 18,03$.

13. $x = \sqrt{219} \approx 14,80$.