# Talteori

### 1. Talsystem och de grundläggande räknelagarna

Det enklaste talsystemet, som vi alla gör bekanskap med tidigt i livet är mängden av s.k. *naturliga tal* eller av *positiva heltal*. Den talmängden betecknas av matematiker som **N**. Alltså,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, .....\}$$

Det finns två grundläggande operationer vi kan utföra på dessa tal som vi kallar för *addition* och *multiplikation*. Förstås all addition är bara upprepning av addition av talet 1 (dvs av *räkning*), och multiplikation är bara upprepad addition (t.ex. $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4$), så konceptuellt kan allting reduceras till räkning. Men ändå så är det helt 'naturligt' att införa dessa två operationer eftersom man vill kunna räkna snabbt och effektivt och inte alltid på fingrarna typ.

FRÅGA : Om addition är upprepad räkning och multiplikation är upprepad addition (av samma tal), vad kallas upprepad multiplikation (av samma tal) för ?

När vi utför additions och multiplikationsuppgifter så måste vi alltid respektera de tre grundläggande *räknelagarna* :

(I) Kommutativitet :

Både addition och multiplikation är kommutativa operationer. Dvs, för godtyckliga naturliga tal $a$ och $b$ så gäller att

$$a + b = b + a \quad \text{och} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(II) Associativitet :

Både addition och multiplikation är associativa operationer. Dvs, för godtyckliga naturliga tal $a, b, c$ så gäller att

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{och} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(III) Distributiva lagen :

Multiplikation är distributativ över addition. Dvs, för godtyckliga naturliga tal $a, b, c$ så gäller att

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Notera dock att addition är inte distributativ över multiplikation, dvs

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$$

i allmänhet. Det finns faktiskt inga tre naturliga tal för vilka vi har likhet - varför ?

Vi kan även *subtrahera* ett naturligt tal $b$ från ett annat naturligt tal $a$ så länge $b < a$. Vill vi få bort denna restriktion måste vi dock för första gången utvidga vårt talsystem så att varje naturliga tal får ett 'negativt' motstycke. Dessutom behöver vi talet *noll*. Mängden av alla *heltal*, både positiva, negativa och noll, betecknas av matematiker med **Z**. Så

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Notera att subtraktion av ett positivt tal är nu samma sak som addition av dess negativa motstycke. En speciell fördel med att införa negativa tal är att det underlättar algebraiska manipulationer. Men för att behålla den fördelen är det ytterst viktigt att de tre grundläggande räknelagarna fortsätter att gälla i det nya sammanhanget. Det är inget problem med de kommutativa och associativa lagarna, men för att den distributiva lagen ska ändå gälla är det nödvändigt att ANSÄTTA

$$(-1) \cdot (-1) := 1.$$

Detta är vad vi känner till som 'minus minus är plus' regeln.

Man kan även dela ett naturligt tal $a$ med ett annat naturligt tal $b$, men resultatet brukar inte vara ett heltal. Är det det, så säger vi att $b$ *delar* $a$, eller att $a$ är en *multipel* av $b$, och skriver $b|a$. Annars lämnas en s.k. *rest* vid divisionen, som är ett heltal mellan 0 och $b-1$ (inkl.).

FRÅGA : Ge tre olika sammanhang i vilka man vill räkna med rester ?

Om vi nu utvidgar vårt talsystem till alla *bråktal* eller s.k. *rationella tal* så kan vi genomföra alla fyra räknesätten utan problem. Men vi återkommer i nästa avsnitt till just hur man räknar med bråktal. Mängden av alla bråktal betecknas av matematiker som $\mathbf{Q}$.

Historiskt så uppfattades länge 'räkning' och 'mätning' som i princip samma koncept, dvs att alla längder (m.a.p. en given enhetslängd) kunde representeras med bråktal. Men (om inte redan tidigare) grekerna upptäckte att detta inte var så. Längden $\sqrt{2}$ dyker upp naturligt som längden av hypoteneusen i en rätvinklig triangel med kateter av längd 1.

**Sats** $\sqrt{2}$ är inget bråktal.

BEVIS :

För att kunna entydigt beteckna varje möjlig längd (dvs varje möjliga resultat av en mätning) så måste vi utvidga talsystemet ytterligare till de s.k. *reella talen*. En viktig egenskap hos reella tal är att varje reellt tal kan approximeras godtyckligt bra med rationella tal - detta är egentligen innehållet i den formella DEFINITIONEN av de reella talen. Vi ser detta explicit genom att betrakta *decimalutvecklingen* av tal. Ett tal med en oändlig decimalutveckling kan approximeras hur bra som helst genom att trunkera utvecklingen någonstans. Varje tal med en ändlig decimalutveckling är rationellt (varför ?).

FRÅGA : Vilka tal bland de med oändliga decimalutvecklingar är rationella ? Varför ?

Vi ska diskutera kort andra talsystem : t.ex. komplexa tal, talen på en klocka (modulär/rest aritmetik).

## Delbarhet, primtal och bråkräkning

Man kan få alla naturliga tal från talet 1 genom addition. Men genom bara multiplikation får man inget nytt tal utom 1 självt. För att kunna få alla naturliga tal genom multiplikation måste vi ta med från början alla s.k. *primtal*. Ett primtal är ett naturligt tal större än 1 som inte är produkten av två mindre naturliga tal, m.a.o. ett tal som bara går att dela med sig självt och 1. Följande två satser är två av de allra viktigaste inslagen i den grekiska matematiken. Båda satserna tillskrivs Euklides :

**Sats 1** Varje naturligt tal större än 1 kan skrivas *på ett unikt sätt* som en produkt av primtal.

**Sats 2** Det finns oändligt många primtal.

Sättet att skriva ett tal som en produkt av primtal kallas för talets *primtalsfaktorisering*.

Diskussion och exempel

Följande begreppen är viktiga för bråkräkning :

Definition 1 : Låt $a$ och $b$ vara två naturliga tal. Den *största gemensamma delaren* av $a$ och $b$, som betecknas $\mathrm{SGD}(a,b)$, är det största heltal som delar både $a$ och $b$.

Definition 2 : Låt $a$ och $b$ vara två naturliga tal. Den *minsta gemensamma multipeln (nämnaren)* av $a$ och $b$, som betecknas $\mathrm{MGM}(a,b)$, är det minsta naturliga tal som är en multipel av både $a$ och $b$.

Kan man primtalsfaktoriseringarna av talen $a$ och $b$ så kan man beräkna deras SGD och MGM direkt. Den första är nämligen produkten av alla deras gemensamma primtalsfaktorer, medan den andra är produkten av alla deras sammanlagda primtalsfaktorer, utan repitition. Speciellt så innebär detta att vi alltid har följande relation mellan SGD och MGM :

$$\mathrm{SGD}(a,b) \times \mathrm{MGM}(a,b) = a \times b.$$

Det finns dock en för stora tal i allmänhet mycket snabbare metod för att beräkna den SGD:en av två givna tal. Den heter *Euklides algoritm* och bygger på upprepad användning av följande principer :

*(i) Låt $a$ och $b$ vara heltal. Om $a$ delar $b$ så delar det även varje multipel av $b$.*
*(ii) Låt $c$ vara ett tredje heltal som också delas av $a$. Då gäller att $a$ delar även $b+c$ och $b-c$.*

Diskussion och exempel

## Bråkräkning

(I) *Förkortning av bråk* :

Låt $a$ och $b$ vara heltal med $b \neq 0$. Hur mycket kan man förkorta bråket $\frac{a}{b}$ ? Ju, det mesta man kan göra är att dela ut från både täljaren och nämnaren den största gemensamma delaren av $a$ och $b$.

Ett bråk $\frac{a}{b}$ sägs vara *i lägsta form* om $b > 0$ och $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$.

(II) *Addition av bråk* :

Låt $a, b, c, d$ vara heltal med varken $b$ eller $d$ lika med noll. Vill man plussa på de två bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$ så måste man först hitta en gemensam multipel (nämnare) för $b$ och $d$. Det enklaste valet är talet $b \cdot d$. Då gäller att (varför ?)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Man kan därefter förkorta bråket på HL enligt (I) ovan. En ekvivalent procedur är att från början inte välja vilken som helst gemensam nämnare för $b$ och $d$, men deras MGM. Varför är det samma sak ? Exempel ...

(III) *Multiplikation av bråk* :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{Varför ?}$$

(IV) *Division av bråk* :

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{Varför ?}$$