1. Uppgifter från våren

Övningarna på sidan 2

1 (i) $3(5+2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 15 + 6 = 21$.
(ii) $3(5+a) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot a = 15 + 3a$.
(iii) $3(a+b) = 3a + 3b$.
(iv) $c(a+b) = ca + cb$.

2. $(3+a)(4+b) = 3(4+b)+a(4+b) = [3\cdot4+3\cdot b]+[a\cdot4+a\cdot b] = 12+3b+4a+ab$.

3 (i) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+b^2+2ab$.
(ii) Vi använder resultatet av **(i)** för att snabba på uträkningen.
$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2+(-b)^2+2a(-b) = a^2+b^2-2ab$.
(iii) $(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = [a^2-ab]+[ba-b^2] = a^2-b^2$.

4 (i) Använd t.ex. att $25 = 20+5$ och del **(i)** av förra uppgiften. Då har vi att
$25^2 = (20+5)^2 = 20^2+5^2+2\cdot20\cdot5 = 400+25+200 = 625$.
(ii) Använd t.ex. att $999 = 1000-1$ och del **(ii)** av förra uppgiften. Då har vi att
$999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2+1^2-2\cdot1000\cdot1 = 1000000+1-2000 = 998001$.
(iii) Använd del **(iii)** av förra uppgiften med $a = 20$ och $b = 1$. Då har vi att
$19\cdot21 = 21\cdot19 = (20+1)(20-1) = 20^2-1^2 = 400-1 = 399$.

Övningarna på sidan 3

Dessa är lite mer öppna frågor så vi går igenom dem på lektionen i stället.

Några övningar (s.5)

1. Låt x, y resp. z beteckna antalet råttor, stänger resp. chokladbitar som Kalle köper. Då gäller att

$$2x + 3y + 5z = 13. \tag{1}$$

Vi söker alltså alla möjliga lösningar till (1) där x, y och z är heltal större än eller lika med noll. Vi ser direkt att $z \leq 2$ (annars blir VL för stor redan) så $z = 0, 1$ eller 2.

Om $z = 2$ då är $2x + 3y = 3$ som tvingar $x = 0$ och $y = 1$. Detta ger en lösning.

Om $z = 1$ då är $2x + 3y = 8$ som lämnar två möjligheter : antingen $x = 4$, $y = 0$ eller $x = 1$, $y = 2$.

Om $z = 0$ då är $2x + 3y = 13$ som också lämnar två möjligheter : antingen $x = 2$, $y = 3$ eller $x = 5$, $y = 1$.

Det finns totalt alltså 5 olika sätt som Kalle kan bli av med alla sina pengar. Han kan antingen/eller köpa

Inga råttor, 1 stäng och 2 chokladbitar
4 råttor, inga stänger och 1 chokladbit
1 råtta, 2 stänger och 1 chokladbit
2 råttor, 3 stänger och inga chokladbitar
5 råttor, 1 stäng och inga chokladbitar.

2. Låt x (resp. y) vara antalet kronor som Kalle (resp. Lisa) besitter.

(i) Den givna informationen ger följande två relationer mellan x och y :

$$x + 8 = y \tag{2}$$
$$y + 8 = 2x. \tag{3}$$

Från (3) får vi att $y = 2x - 8$ och stoppar vi in detta i (2) så får vi att $x + 8 = 2x - 8 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = 24$. Så Kalle har 16 kronor och Lisa 24 kronor i detta fall.

(ii) Jag antar att Kalle har mer pengar än Lisa här (man kan lika väl antaga motsatsen). Den givna informationen ger då följande relationer mellan x och y :

$$x + 8 = y - 8 \tag{4}$$
$$y + 8 = 2(x - 8). \tag{5}$$

Från (5) får vi att $y + 8 = 2x - 16 \Rightarrow y = 2x - 24$, medan att från (4) har vi att $y = x + 16$. Därmed måste $2x - 24 = x + 16$ som innebär att $x = 40$ och $y = 24$. Så Kalle har 40 kronor och Lisa har 24 kronor i detta fall.

3 Lägger vi ihop talen i de tre linjerna får vi å ena sidan $3 \cdot 12 = 36$.

Å andra sidan får vi med alla talen från 1 till 7 en gång, utom det tal som står i mitten som tas med 3 ggr. Om detta tal kallas för x då har vi alltså att

$$(1+2+3+4+5+6+7)+2x=36, \tag{6}$$

som innebär att $x=4$. Man kan då fylla i hjulet på ett antal olika sätt, t.ex.: med $1-2-3-7-6-5$ då man läser medurs.

(i) Samma analys leder till följande ekvation i stället för (6) :

$$(1+2+3+4+5+6+7)+2x=30, \tag{7}$$

som innebär att mittentalet $x=1$. Man kan då fylla i hjulet t.ex. med $2-3-4-7-6-5$ då man läser medurs.
(ii) Nej ! Samma analys som ovan skulle leda till följande ekvation för mittentalet x :

$$(1+2+3+4+5+6+7)+2x=33. \tag{8}$$

Men (8) medför att $x=5/2$, en motsägelse ty x måste vara ett heltal mellan 1 och 7.
(iii) Byter vi 12 mot n, säg, då får vi följande ekvation för mittentalet x :

$$(1+2+3+4+5+6+7)+2x=3n.$$

Detta medför att $x=\frac{3n-28}{2}=\frac{3n}{2}-14$. För att det ska finnas en lösning så måste alltså $\frac{3n}{2}-14$ vara ett heltal mellan 1 och 7. Det är ett heltal om och endast om n är jämnt (ty vi delar $3n$ med 2). Det ligger mellan 1 och 7 om och endast om

$$1 \leq \frac{3n}{2}-14 \leq 7,$$

som reduceras till

$$10 \leq n \leq 14.$$

Alltså finns det en lösning för bara tre olika värden av n, nämligen 10,12 och 14. Alltså, utom 12 och 10 kan man bara byta till 14.

3.

$$
\begin{aligned}
SGD(84,315) = 21 &\Rightarrow \frac{84}{315} = \frac{4}{15},\\
SGD(322,238) = 14 &\Rightarrow \frac{322}{238} = \frac{23}{17},\\
SGD(260,975) = 65 &\Rightarrow \frac{260}{975} = \frac{4}{15},\\
SGD(456,1672) = 152 &\Rightarrow \frac{456}{1672} = \frac{3}{11},\\
SGD(759,561) = 33 &\Rightarrow \frac{759}{561} = \frac{23}{17},\\
SGD(153,561) = 51 &\Rightarrow \frac{153}{561} = \frac{3}{11}.
\end{aligned}
$$

Därmed har vi att

$$\frac{84}{315} = \frac{260}{975}, \quad \frac{322}{238} = \frac{759}{561}, \quad \frac{456}{1672} = \frac{153}{561}.$$

4. Man kan använda att, om a, b, c, d är fyra positiva heltal, så gäller att

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

Detta reducerar jämförelsen av de tre bråken till en multiplikationsuppgift. En lite klurigare metod är att jämföra alla tre med $0,4$, som alla ligger strax över.

I vilket fall som helst, svaret blir att

$$\frac{131}{321} > \frac{212}{520} > \frac{173}{425}.$$

5 (a) $= \left(\frac{1-9}{6}\right)\left(\frac{2\cdot3+4\cdot7}{21}\right) = -\frac{8}{6} \times \frac{34}{21} = -\frac{4}{3} \times \frac{34}{21} = -\frac{4\cdot34}{3\cdot21} = -\frac{136}{63}$.
(b) $= \left(\frac{4\cdot5-3\cdot9}{45}\right)\left(\frac{4\cdot5+7\cdot3}{15}\right) = -\frac{7}{45} \times \frac{41}{15} = -\frac{7\cdot41}{45\cdot15} = -\frac{287}{675}$.
(c) Jag tolkar uppgiften att parantesen ska multipliceras med $\frac{35}{9}$. Då har vi att

$$\frac{35}{9}\left(\frac{6}{7} - \frac{3}{5}\right) = \frac{35}{9}\left(\frac{6\cdot5 - 3\cdot7}{35}\right) = \frac{35}{9} \times \frac{9}{35} = 1.$$

6. Använd faktumet att

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \Leftrightarrow xw = yz.$$

Då har vi att den första formeln stämmer om och endast om $(a+b)c = (a+c)b \Leftrightarrow ac+bc = ab+cb \Leftrightarrow ab = ac \Leftrightarrow a(b-c) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $b-c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $b = c$.

Den andra formeln stämmer om och endast om $abc = (a+c)b \Leftrightarrow b[ac-(a+c)] = 0 \Leftrightarrow b = 0$ eller $ac-(a+c) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ eller $c = \frac{a}{a-1}$. Dvs för att formeln ska stämma så måste både a och c vara skilda från noll och antingen $b = 0$ eller $c = \frac{a}{a-1}$. Notera att om vi begränsar oss till heltalslösningar så måste $\frac{a}{a-1}$ vara ett heltal, som inträffar om och endast om $a = c = 2$.

7 **(i)** $0,\overline{7}$ **(ii)** $0,\overline{153846}$ **(iii)** $4,2$ **(iv)** $2,\overline{09}$

8 **(i)** $\frac{237}{1000}$.
(ii) $\frac{237}{1000} \times \frac{1000}{999} = \frac{237}{999}$.
(iii) $\frac{341}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{243}{999} = \frac{341 \times 999 + 243}{9990} = \frac{340902}{9990} = \frac{6313}{185}$.

(Obs! För den sista förkortningen så räknade jag att $\mathrm{SGD}(340902, 9990) = 54$, men m.h.a. en dator !!!!).

9. Klockan 12 eftersom $3729 = 310 \cdot 12 + 9$.

10. Lördag, tisdag och torsdag.

11. 1,1 och 6.

Övningar i algebra (s.8)

1. $x = -\frac{11}{8}$.

2. $x = -\frac{83}{63}$.

3. $x < 4$.

4. $x > -\frac{83}{63}$.

5. Denna är en lättare version av uppgift 4 i förra avsnittet. Svaret blir att

$$\frac{7}{2} > \frac{27}{8} > \frac{10}{3}.$$

6 **(i)** $x = 1$ eller $x = -3$.
(ii) $x = 2$ eller $x = -4$.

(iii) $x = 1$ eller $x = -7$.

7 (i) $x \equiv 7 \pmod{13}$ **(ii)** $x \equiv 10 \pmod{13}$ **(iii)** $x \equiv 9 \pmod{13}$.

8. $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ så $3^{100} = (3^4)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{10}$. Svar : 1.

9. $x = 11$, $y = 1$.

11. $x = -\frac{10}{11}$, $y = \frac{25}{11}$.

12. Finns ingen lösning ty den första ekvationen medför att $2x + 4y = 2(x + 2y) = 2 \cdot 1 = 2$ som säger emot den andra ekvationen.

13. Kalla talet för x. De givna uppgifterna leder till följande ekvation för x :

$$2(5x + 10) = 40.$$

Lösningen till denna är $x = 2$.

Blandade Övningar

1 (i) $\frac{12}{13}$ **(ii)** $\frac{151}{32}$ **(iii)** $\frac{43}{16}$.

2. $\frac{2a+c}{2b}$.

3. $\frac{53}{196}$.

4. $2,5 \times 10^{21}$.

5. $\frac{123}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{46}{99} = \frac{12223}{990}$ (man borde kolla att $\mathrm{SGD}(12223, 990) = 1$).

6. $= \frac{7}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$.

7. $496 \equiv 1 \pmod{3}$ så svaret blir 1.

8. $x = \frac{16}{7}$.

9. $x < -\frac{9}{37}$.