1. Beviset följer exakt samma typ av arguemnt som i fallet $\sqrt{2}$ som demonstrerades på lektionen. I det senare så blev nyckelobservationen att

'*Om ett tal i kvadrat är jämnt så är talet självt jämnt*'.

Här så är motsvarande nyckelobservation att

'*Om ett tal i kvadrat är delbart med 3 så är även talet självt det*'.

ANMÄRKNING : Det gäller för ett godtyckligt primtal p att om ett tal i kvadrat är delbart med p så är även talet självt det. Detta följer från att varje tal har en UNIK primtalsfaktorisering. Och därmed så kan man med samma typ av argument som de ovannämnda bevisa att $\sqrt{p}$ är ett irrationellt tal för varje primtal p.

2. Som vi diskuterade idag på lektionen så gäller att, om n är ett godtyckligt positivt heltal, och a, b, c, d är heltal så att $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$ då är $ac \equiv bd \pmod{n}$.

OK, så varje udda tal är kongruent till ett av 1,3,5 och 7 (mod 8) och därmed, enligt principen ovan, så är varje udda tal i kvadrat kongruent till ett av $1^2, 3^2, 5^2$ och $7^2 \pmod{8}$. Så det är bara att kolla att 1,3,25 och 49 alla lämnar rest 1 vid division med 8.

3.

$$SGD(472, 192) = 8, \quad MGM(472, 192) = \frac{472 \times 192}{8} = 11328,$$
$$472 = 2^3 \cdot 59, \quad 192 = 2^6 \cdot 3.$$

$$SGD(870, 114) = 6, \quad MGM(870, 114) = \frac{870 \times 114}{6} = 16530,$$
$$870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29, \quad 114 = 2 \cdot 3 \cdot 19.$$

$$SGD(850, 68) = 34, \quad MGM(850, 68) = \frac{850 \times 68}{34} = 1700,$$
$$850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 17, \quad 68 = 2^2 \cdot 17.$$

$$SGD(664,106) = 2, \quad MGM(664,106) = \frac{664 \times 106}{2} = 35192,$$
$$664 = 2^3 \cdot 83, \quad 106 = 2 \cdot 53.$$

$$SGD(567,495) = 9, \quad MGM(567,495) = \frac{567 \times 495}{9} = 56133,$$
$$567 = 3^4 \cdot 7, \quad 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

4 (i) Tar vi bort entalssiffran från ett tal så får vi automatiskt ett tal i 10:ans tabell och därmed i 2:ans (resp. 5:ans) tabell. Så det är bara entalssifrran som kan lämna en rest vid division med 2 (resp. 5).
(ii) Tar vi bort från ett tal det 2-siffriga talet som utgörs av dess två sista siffror så får vi automatiskt ett tal i 100:ans tabell och därmed i 4:ans tabell också, ty 4 går jämnt in i 100. Detta medför att det bara talet som utgörs av de två sista siffrorna som kan lämna en rest vid division med 4.
(iii) Låt talet vara $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ där de a_i är dess decimalsiffror. Detta står alltså egentligen för talet

$$a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^n a_n.$$

Notera att $10 \equiv 1 \pmod 9$ så detsamma gäller varje potens av 10. Det följer att

$$a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 9.$$

Dvs, ett tal lämnar alltid samma rest vid division med 9 som gör summan av dess bas-10 siffror. Speciellt så är talet jämnt delbart med 9 om och endast om dess siffersumma är det.

(b) Räcker att kolla de sista 2,3 resp. k siffrorna för att avgöra om ett tal är delbart med $2^3, 2^4$ resp. 2^k. Samma gäller för $5^3, 5^4$ resp. 5^k.

(c) Talet $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ är jämnt delbart med 11 om och endast om dess *alternerande siffersumma*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$$

är det. Samma bevis som i **(iii)** ovan ty $10 \equiv -1 \pmod{11}$ så $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ för varje $k \geq 0$.

5 (i) Ja, 2 och 3. Men inga fler exempel ty bland två efterföljande tal så har vi alltid ett jämnt tal.
(ii) Ja, 3, 5 och 7. Men inga fler exempel ty bland tre efterföljande udda tal så har vi alltid en multipel av 3.

6. Låt n vara ett tal > 1. Om n inte är ett primtal så kan den skrivas som produkten av två mindre tal, säg $n = p \cdot q$ där $p < n$ och $q < n$. Men minst ett av p och q måste vara $\leq \sqrt{n}$ för annars så skulle $p \cdot q > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, en motsägelse.

7. Orkar inte.

8. 20 minuter är 1200 sekunder. Vi har att $1200 = 16 \cdot 72 + 48$, dvs $1200 \equiv 48 \pmod{72}$. Så efter 20 minuter så är hon 48 sekunder in i ett varv, dvs exakt $\frac{3}{5}$ av vägen runt banan. Detta innebär att hon är $\frac{2}{5} \times 400 = 160$ meter från mållinjen.