Sammanfattning av resultaten for tisdag 1 juni

Dessa resultat gäller Utmaning 2.

Uppgift 1

A. Eftersom alla primtal utom 2 är udda tal, så är skillnaden mellan två på varandra följande (pvf) primtal alltid ett jämt tal, utom mellan 2 och 3.

B. Gapen mellan pvf primtal kan bli godtyckligt stora. T.ex. inget av talen

$$\begin{array}{ccc}
2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 1,000,001 & + & 2 \\
2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 1,000,001 & + & 3 \\
2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 1,000,001 & + & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 1,000,001 & + & 1,000,001
\end{array}$$

är ett primtal. För det första talet är delbart med 2, det andra med 3, det tredje med 4, o.s.v. Därmed, om p är det sista primtalet innan $[1,000,001]! + 2$ och q är det första primtalet efter $[1,000,001]! + 1,000,001$, då är p och q två pvf primtal, och skillnaden mellan dem är större än 1,000,000.

C. Å andra sidan är det troligt att små gap fortsätter att förekomma bland större och större primtal. Men det är ohyggligt svårt att bevisa något i denna riktning - se **4A** nedan.

Uppgift 2

A. Andelen primtal upp till n minskar ju större n blir. Men minskningen sker väldigt långsamt. T.ex.,

- 40 procent av talen upp till 10 är primtal,
- 20.7 procent av talen upp till 300 är primtal,
- 10.9 procent av talen upp till 30,000 är ptimtal
- 4.9 procent av talen upp till 2,000,000,000 är primtal.

B. Primtalen tar aldrig slut - det finns oändligt många av dem. För antag att jag ger dig en ändlig lista av primtal. Då kan jag alltid skapa ett tal alla vars primtalsfaktorer ligger utanför den givna listan, nämligen talet

$$(\text{produkten av de givna primtalen}) \quad + \quad 1.$$

Uppgift 4

A. Det är okänt om det finns oändligt många primtalstvillingar eller inte. Detta problem är så berömt att det har ett namn - det kallas för *Twin Primes Problem*. Alla förnuftiga (!) människor tror att det finns oändligt många sådana par, men ingen har lyckats bevisa det.

B. Å andra sidan är det relativt enkelt att inse att $\{3, 5, 7\}$ är de enda primtalstrillingarna. För bland tre pvf udda tal så finns det alltid ett som ligger i 3:ans tabell.

Uppgift 3

A. *Dirichlets sats*, som först bevisades 1829, säger följande :

Låt n vara ett positivt heltal. Låt a vara ett av talen $0, 1, 2, ..., n - 1$. Då finns det oändligt många primtal som lämnar resten a vid division med n om och endast om $\text{SGD}(a, n) = 1$.

EXEMPEL : $n = 4$.

Bland talen 0,1,2 och 3 är det 1 och 3 vars SGD med 4 är lika med 1. Enligt Dirichlets sats så finns oändligt primtal som lämnar resten 1 (resp. 3) vid division med 4. Se filen med tabeller.

Vi inser lätt att det inte finns oändligt många primtal som lämnar rest 0 eller 2. För alla sådana tal är jämna, och 2 är det enda jämna primtalet.

EXEMPEL 2 : $n = 5$.

Bland talen 0,1,2,3 och 4 är det bara 0 vars SGD med 5 inte är lika med 1. Enligt Dirichlets sats så finns det oändligt många primtal som lämnar rest 1 (resp. 2,3 eller 4) vid division med 5. Se filen med tabeller.

Vi inser lätt att så är inte fallet för resten 0. För alla tal som lämnar rest 0 vid division med 5 ligger i 5:ans tabell, och 5 är det enda primtal som ligger där.

EXEMPEL : $n = 6$.

Bland talen 0,1,2,3,4 och 5 är det bara 1 och 5 vars SGD med 6 är lika med 1. Enligt Dirichlets sats, så finns det oändligt många primtal som lämnar rest 1 (resp. 5) vid division med 6.

Vi inser lätt att så är inte fallet för de återstående resterna :

- om resten är 0 så ligger talet i 6:ans tabell, och det finns inga sådana primtal,

- om resten är 2 eller 4 så ligger talet i 2:ans tabell och 2 är det enda sådana primtalet,

- om resten är 3 så ligger talet i 3:ans tabell, och 3 är det enda sådana primtalet.