LNM 100 : Tentamen 130505

Lösningar

1. Antalet barn måste gå jämnt upp i 468 och de alternativ man har för antalet barn är alltså alla sådana tal. För att ta reda på dessa så tar vi först fram primtalsfaktoriseringen för 468 :

$$468 = 2 \cdot 234 = 2 \cdot 2 \cdot 117 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13.$$

Vi söker nu alla möjliga kombinationer av dessa primtalsfaktorer. Den fullständiga listan är

$$\begin{aligned}
1,\ 2,\ 3,\ 13&,\\
2 \cdot 2 = 4&,\\
2 \cdot 3 = 6&,\\
3 \cdot 3 = 9&,\\
2 \cdot 2 \cdot 3 = 12&,\\
2 \cdot 3 \cdot 3 = 18&,\\
2 \cdot 13 = 26&,\\
2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36&,\\
3 \cdot 13 = 39&,\\
2 \cdot 2 \cdot 13 = 52&,\\
2 \cdot 3 \cdot 13 = 78&,\\
3 \cdot 3 \cdot 13 = 117&,\\
2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 234&,\\
2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 468&.
\end{aligned}$$

2. Först gäller det att ta fram det minsta tal som går att mäta upp, dvs SGD$(840, 483)$. Man kan göra detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned}
840 &= 1 \cdot 483 + 357\\
483 &= 1 \cdot 357 + 126\\
357 &= 2 \cdot 126 + 105\\
126 &= 1 \cdot 105 + 21\\
105 &= 5 \cdot 21 + 0.
\end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(840,483)=21$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för de bägge talen :

$$840 = 2\cdot 420 = 2\cdot 2\cdot 210 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 105 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 35 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,$$
$$483 = 3\cdot 161 = 3\cdot 7\cdot 23,$$

från vilka vi också ser att $\mathrm{SGD}(840,483) = 3\cdot 7 = 21$.

Därmed är 21 det minsta antal liter som kan mätas upp och inget av talen mellan 1 och 8 kan mätas upp.

3. Talets sista siffra är en 9:a. Vi har

$$9 = 4\cdot 2 + 1,$$
$$9 = 1\cdot 5 + 4,$$

som innebär att talet lämnar rest 1 (resp. 4) vid division med 2 (resp. 5).

Talets två sista siffror är 89 och

$$89 = 22\cdot 4 + 1,$$

som innebär att talet lämnar rest 1 vid division med 4. Talets tre sista siffror är 789, och

$$789 = 98\cdot 8 + 5,$$

som innebär att talet lämnar rest 5 vid division med 8. Talets siffersumma kontrolleras vara 143, som i sin tur har siffersumma 8. Därmed ser vi att talet lämnar rest 2 (resp. 8) vid division med 3 (resp. 9).

4. Med tanke på att $3167\times 2 = 6334$ och att $80\times 80 = 6400$, så bör det 80:e t-talet ligga i närheten. Det 80:e t-talet ges exakt av

$$\frac{80\times 81}{2} = 3240.$$

Detta är alltså något för stort. Det 79:e t-talet fås genom att subtrahera 80, och är därmed lika med $3240 - 80 = 3160$. Detta är mindre än 3167 och betydligt närmare än 3240.

Svaret är alltså att det är det 79:e t-talet som ligger närmast 3167.

5 (i) Den 11:e raden av multiplikationstabellen på en 35-klocka består av resterna som lämnas vid division med 35 av de 35 första talen i 11:ans tabell. Den ser ut så här alltså

$$\begin{gathered}11\ 22\ 33\ 9\ 20\ 31\ 7\ 18\ 29\ 5\ 16\ 27\ 3\ 14\ 25\ 1\ 12\ 23 \\ 34\ 10\ 21\ 32\ 8\ 19\ 30\ 6\ 17\ 28\ 4\ 15\ 26\ 2\ 13\ 24\ 0.\end{gathered}$$

(ii) $35 = 5 \cdot 7$. Därmed förkommer alla talen i de rader som ligger i varken 5:ans eller 7:ans tabell, dvs rader nummer

$$\begin{gathered}1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 9\ 11\ 12\ 13\ 16\ 17\ 18\ 19\ 22 \\ 23\ 24\ 26\ 27\ 29\ 31\ 32\ 33\ 34.\end{gathered}$$

6 (i) Eftersom $9 = 3^2$ så kan vi först konstatera att $9^{23} = (3^2)^{23} = 3^{2 \cdot 23} = 3^{46}$. Därmed kan vi byta ut VL:en mot $2 \cdot 3^{46} + 3^{46} = (2+1) \cdot 3^{46} = 3 \cdot 3^{46} = 3^{47}$, v.s.v.
(ii) 6^{15} enligt multiplikationsprincipen, ty det finns 6 möjliga utgångar för varje kast.

7. Om vi börjar med talet 199×141 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 199 grupper av bollar med 141 st i varje. Tar vi bort två bollar från varje grupp så har vi 199 grupper med 139 i varje. Lägger vi till två nya sådana grupper, så har vi 201 grupper med 139 i varje, och därmed 201×139 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $2 \cdot 199$ bollar, och lagt till $2 \cdot 139$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $2 \cdot 199 - 2 \cdot 139 = 3 \cdot (199 - 139) = 2 \cdot 60 = 120$ bollar, som innebär att

$$199 \times 141 - 201 \times 139 = 120.$$