Tentamenskrivning i LNM 100 (Delkurs 3, Aritmetik)

Lösningar

1. För att både kakorna och tårtorna ska kunna fördelas rättvist så måste antalet barn vara ett tal som delar både 168 och 70. Först hittar vi det störts sådana tal, det s.k. SGD av 168 och 70.

Metod 1 : Euklides algoritm

$$\begin{aligned} 168 &= 2 \cdot 70 + 28 \\ 70 &= 2 \cdot 28 + 14 \\ 28 &= 2 \cdot 14 + 0, \end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(168, 70) = 14$.

Metod 2 : Primtalsfaktorisering

Vi har att

$$168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

och

$$70 = 2 \cdot 35 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Därmed har talen en 2:a och en 7:a gemensamt i deras primtalsfaktoriseringar, som bekräftar att $\mathrm{SGD}(168, 70) = 2 \cdot 7 = 14$.

Därmed är 14 det största antalet barn som passar. Talen 1,2,7 och 14 delar 14 och dessa utgör alla alternativen för antalet barn.

2. Följande är en fullständig lista över alla par av primtalshalvsyskon upp till 100 :

$$\begin{gathered} \{3, 7\}, \{7, 11\}, \{13, 17\}, \{19, 23\}, \\ \{37, 41\}, \{43, 47\}, \{67, 71\}, \{79, 83\}. \end{gathered}$$

3. Talen i en viss kolonn lämnar alla samma rest vid division med 15 : mer precis, talen i kolonn 1 lämnar rest 1, talen i kolonn 2 lämnar rest 2, o.s.v., och talen i den sista kolonnen lämnar rest 0.

Enligt Dirichlets sats så finns det oändligt många primtal som lämnar resten x vid division med 15 om och endast om $\text{SGD}(x, 15) = 1$. Bland talen från 0 till 14 är det just 1,2,4,7,8,11,13 och 14 vars SGD med 15 är lika med 1. Så de motsvarande kolonnerna innehåller var för sig oändligt många primtal.

Då har vi kvar kolonner 3,5,6,9,10,12 och 15. Alla talen i kolonner 3,6,9,12 och 15 ligger i 3:ans tabell så det finns bara ett primtal bland dem, nämligen 3, som ligger i kolonn 3. Alla talen i kolonner 5 och 10 ligger i 5:ans tabell så det finns också precis ett primtal bland dem, nämligen 5, som ligger i kolonn 5.

4 (VG(+) uppgiften !) Jag ska förklara varför det räcker att testa alla primtal upp till 31 :

(A) varje delare till ett tal är en sammansättning av vissa av talets primtalsfaktorer. Så om ett tal inte har några primtalsdelare mindre än sig självt så har det inga delare alls mindre än sig självt (utom 1).

(B) ett tal som inte är ett primtal måste ha en delare, utom 1, som är mindre än eller lika med dess kvadratiska rot. För om p är en delare till n s.a. $p \geq \sqrt{n}$, då är talet n/p också en delare till n och $n/p \leq n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$.

(A) + (B) tillsammans förklarar varför det räcker, för talet 997, att testa alla primtal upp till 31, ty $\sqrt{997}$ ligger mellan 31 och 32 ($31 \cdot 31 = 961 < 997$ och $32 \cdot 32 = 1024 > 997$).

Om man vill så kan man gå vidare lite grann genom att konstatera att det går att se direkt att 997 är delbart med varken 2 eller 5 pga att dess sista siffra är varken jämt eller en 5:a.

Därmed räcker det egentligen att testa följande tal : 3,7,11,13, 17,23,29,31.