LNM 100 : Tentamen 061204

Lösningar

1. Vi börjar med att ta fram primtalsfaktoriseringen av 140 :

$$140 = 2 \cdot 70 = 2 \cdot 2 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Primtalskfatorerna kan kombineras på följande olika sätt

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 2 \\ 5 &= 5 \\ 7 &= 7 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 2 \cdot 7 &= 14 \\ 5 \cdot 7 &= 35 \\ 2 \cdot 2 \cdot 5 &= 20 \\ 2 \cdot 2 \cdot 7 &= 28 \\ 2 \cdot 5 \cdot 7 &= 70 \\ 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 &= 140. \end{aligned}$$

Därmed får vi följande alternativ för 'längd $\times$ bredd' för en fyrkant med area $140m^2$ och heltaliga sidolängder :

$$\begin{array}{cccccc} 1 \times 140 & 2 \times 70 & 5 \times 28 & 7 \times 20 & 4 \times 35 & 10 \times 14 \\ 14 \times 10 & 35 \times 4 & 20 \times 7 & 28 \times 5 & 70 \times 2 & 140 \times 1. \end{array}$$

2 (i) De antal liter som kan mätas upp är de tal som är jämt delbara med SGD$(348, 66)$. Vi räknar fram det senare m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned} 348 &= 5 \cdot 66 + 18 \\ 66 &= 3 \cdot 18 + 12 \\ 18 &= 1 \cdot 12 + 6 \\ 12 &= 2 \cdot 6 + 0, \end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(348, 66) = 6$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för 348 och 66. Vi har nämligen

$$\begin{aligned} 348 &= 2 \cdot 174 = 2 \cdot 2 \cdot 87 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 29, \\ 66 &= 2 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 11. \end{aligned}$$

En gång till så ser vi att $\mathrm{SGD}(348, 66) = 2 \cdot 3 = 6$.

I varje fall så innebär nu detta att vi kan mäta upp alla talen i 6:ans tabell. Så av de givna alternativen kan vi mäta upp bara 6 och 12 liter.

(ii) Från första steget i Euklides algoritm ovan så ser vi att

$$18 = 348 - 5 \cdot 66.$$

En motsvarande process för att mäta upp 18 liter är att först fylla den stora hinken med 348 liter, och därefter tomma ut 66 liter i den lilla hinken fem gånger om.

3. Talets sista siffra är en 3:a. Vi har

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \\ 3 &= 0 \cdot 5 + 3, \end{aligned}$$

som innebär att talet lämnar rest 1 (resp. 3) vid division med 2 (resp. 5).

Talets två sista siffror är 13 och

$$13 = 3 \cdot 4 + 1,$$

som innebär att talet lämnar rest 1 vid division med 4. Talets tre sista siffror är 213, och

$$213 = 26 \cdot 8 + 5,$$

som innebär att talet lämnar rest 5 vid division med 8. Talets siffersumma kontrolleras vara 90, som i sin tur har siffersumma 9. Eftersom

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 + 0, \\ 9 &= 1 \cdot 9 + 0, \end{aligned}$$

så ser vi att talet lämnar rest 0 vid division med både 3 och 9.

4. Ett alternativ är att sätta in $n = 15004$ i formeln $n(n+1)/2$ för triangeltalen. Då får vi svaret

$$\frac{15004 \times 15005}{2} = 112567510.$$

Problemet med denna metod är att man måste multiplicera två relativt stora tal för hand, som ökar risken att man gör ett räknefel. För att slippa detta, så kan vi i stället konstatera att

$$\begin{pmatrix} \text{Det 15004:e} \\ \text{triangeltalet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Det 15000:e} \\ \text{triangeltalet} \end{pmatrix} + (15001 + 15002 + 15003 + 15004)$$

$$= 112507500 + 60010$$

$$= 112567510, \quad \text{som förut.}$$

5 (i) Den 7:de raden av multiplikationstabellen på en 24-klocka består av resterna som lämnas vid division med 24 av de 24 första talen i 7:ans tabell. Den ser ut så här alltså

$$7\ 14\ 21\ 4\ 11\ 18\ 1\ 8\ 15\ 22\ 5\ 12\ 19\ 2\ 9\ 16\ 23\ 6\ 13\ 20\ 3\ 10\ 17\ 0.$$

(ii) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Därmed förkommer alla talen i de rader som ligger i varken 2:ans eller 3:ans tabell, dvs rader nummer

$$1 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23.$$

6 (i) Det 630:e Hanoitalet ges av $2^{630} - 1$. Det räcker alltså att uppskatta 2^{630}. Vi har följande grova uppskattning :

$$2^{630} = (2^{10})^{63} \approx (10^3)^{63} = 10^{3 \times 63} = 10^{189}.$$

Detta tal har 190 decimalsiffror, så det står klart att alternativ (b) måste vara korrekt.

(ii) Runtresan består av följande 6 etapper :

1. Hem $\rightarrow$ Staden
2. Staden $\rightarrow$ Arbete
3. Arbete $\rightarrow$ Staden

4. Staden $\to$ Träningen
5. Träningen $\to$ Staden
6. Staden $\to$ Hem.

På de olika etapperna har Johnny 5,4,4,3,3 resp. 5 val för vilken buss han ska ta. Enligt muliplikationsprincipen, så ges det totala antalet möjligheter för hela resan av

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5 = (5 \times 4 \times 3)^2 = 60^2 = 3600.$$

7 (i) $2^{21} + 8^7 = 2^{21} + (2^3)^7 = 2^{21} + 2^{3 \cdot 7} = 2^{21} + 2^{21} = 2 \cdot 2^{21} = 2^{21+1} = 2^{22}$, v.s.v.

(ii) Om vi börjar med talet 168×210 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 210 grupper av bollar med 168 st i varje. Tar vi bort två bollar från varje grupp så har vi 210 grupper med 166 i varje. Lägger vi till två nya sådana grupper, så har vi 212 grupper med 166 i varje, och därmed 166×212 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $2 \cdot 210 = 420$ bollar, och lagt till $2 \cdot 166 = 332$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $420 - 332 = 88$ bollar, som innebär att

$$168 \times 210 - 166 \times 212 = 88.$$