

LNM 100 : Tentamen 260805

Lösningar

1. Vi har följande primtalsfaktorisering av talet 12600 :

$$\begin{aligned} 12600 &= 2 \cdot 6300 = 2^2 \cdot 3150 = 2^3 \cdot 1575 = 2^3 \cdot 5 \cdot 315 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 63 \\ &= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 21 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 7, \end{aligned}$$

dvs

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

(i) De alternativ man har för antalet barn är just de tal som går jämnt in i 12600. Enligt multiplikationsprincipen, så finns det

$$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$$

sådana tal.

(ii) De 10 minsta tal som går jämnt in i 12600, m.a.o. de 10 minsta tal som uppstår som kombinationer av dess primtalsfaktorer, är just

1, 2, 3, 4(= 2 · 2), 5, 6(= 2 · 3), 7, 8(= 2 · 2 · 2), 9(= 3 · 3), och 10(= 2 · 5).

2. Först gäller det att ta fram det största sådana tal, dvs SGD(990, 408). Man kan göra detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$990 = 2 \cdot 408 + 174$$

$$408 = 2 \cdot 174 + 60$$

$$174 = 2 \cdot 60 + 54$$

$$60 = 1 \cdot 54 + 6$$

$$54 = 9 \cdot 6 + 0,$$

som innebär att SGD(990, 408) = 6. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för de bägge talen :

$$990 = 2 \cdot 495 = 2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11,$$

$$408 = 2 \cdot 204 = 2 \cdot 2 \cdot 102 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 51 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17,$$

från vilka vi också ser att SGD(990, 408) = 2 · 3 = 6.

De tal som går jämnt in i bägge talen är därmed alla talen som går jämnt in i 6, nämligen 1,2,3 och 6.

3. Vi börjar med att ta reda på vilket triangeltal ligger närmast 2450. Med tanke på att $2450 \times 2 = 4900 = 70 \times 70$, så bör det 70:e t-talet ligga i närheten. Det 70:e t-talet ges exakt av

$$\frac{70 \times 71}{2} = 2485.$$

Detta är alltså det första t-talet i det givna intervallet. Det 71:a t-talet är $2485 + 71 = 2556$, som också ligger i intervallet. Det 72:a t-talet är $2556 + 72 = 2628$ som gör detsamma. Det 73:e t-talet är $2628 + 73 = 2711$, som ligger utanför.

Svaret är alltså att det finns 3 st triangeltal mellan 2450 och 2650, nämligen 2485, 2556 och 2628, som är de 70:e, 71:a och 72:a t-talen respektivt.

4. Om vi börjar med talet 344×266 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 344 grupper av bollar med 266 st i varje. Tar vi bort tre bollar från varje grupp så har vi 344 grupper med 263 i varje. Läger vi till tre nya sådana grupper, så har vi 347 grupper med 263 i varje, och därmed 347×263 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $3 \cdot 344$ bollar, och lagt till $3 \cdot 263$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $3 \cdot 344 - 3 \cdot 263 = 3 \cdot (344 - 263) = 3 \cdot 81 = 81 + 81 + 81 = 243$ bollar, som innebär att

$$344 \times 266 - 347 \times 263 = 243.$$

5 (i) 6^{11} olika utgångar.

(ii) $C(16, 6) = 8008$ olika sätt.

(iii) De två esser kan väljas på $C(4, 2) = 6$ olika sätt. Detsamma gäller för de två 2:orna. 3:an kan väljas på $4 = C(4, 1)$ olika sätt. Antalet sätt att kombinera dessa val till en pokerhand är alltså, enligt multiplikationsprincipen, $6 \times 6 \times 4 = 144$ sätt.

6. Ett tal som lämnar resten 3 vid division med 4 är ett udda tal. Därmed är alla dess primtalsfaktorer udda också. Varje udda tal lämnar antingen 1 eller 3 i rest vid division med 4. Men ett tal är lika med produkten av alla dess primtalsfaktorer. Det räcker nu att konstatera att produkten av

två tal som båda lämnar rest 1 vid division med 4 gör detsamma, eftersom detta innebär direkt att om alla vårt tals primtalsfaktorer lämnade resten 1 så skulle deras produkt, nämligen vårt tal, göra detsamma, en motsägelse.

För att vara helt rigoröst, så återstår det att motivera påståendet ovan, som jag nu repeterar :

Om var och ett av två givna tal lämnar rest 1 vid division med 4, så gör deras produkt detsamma

Detta kan förklaras på många olika sätt. Här väljer jag en kortfattad algebraisk förklaring. Låt talen kallas för A och B . Att båda två lämnar rest 1 vid division med 4 innebär att det finns heltal m och n så att

$$A = 4m + 1, \quad B = 4n + 1.$$

Men då har vi att

$$A \cdot B = (4m + 1) \cdot (4n + 1) = 4m \cdot 4n + 4m \cdot 1 + 4n \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 16mn + 4m + 4n + 1 = 4(4mn + m + n) + 1$$

dvs vi får ännu ett tal på formen '4 gånger någonting, plus ett'. M.a.o. har vi ännu ett tal som lämnar rest 1 vid division med 4.

7 (i) Utgångspositionen är (20, 14). Man borde antingen gå diagonalt till (16, 10) eller rakt upp till (9, 14).

(ii) Rutorna längs denna diagonal ges av $(x, x + 8)$ där x löper över alla positiva heltalen. Vi söker alltså en B-gynnande position av denna form, och den är positionen (13, 21). Man måste alltså gå ner till den 13:e raden för att hitta en position som gynnar B.