LNM 100 : Tentamen 260805

Lösningar

1. Vi har följande primtalsfaktorisering av talet 12600 :

$$\begin{aligned}12600 = 2 \cdot 6300 = 2^2 \cdot 3150 = 2^3 \cdot 1575 = 2^3 \cdot 5 \cdot 315 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 63 \\ = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 21 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 7,\end{aligned}$$

dvs

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

(i) De alternativ man har för antalet barn är just de tal som går jämnt in i 12600. Enligt multiplikationsprincipen, så finns det

$$(3+1) \times (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$$

sådana tal.

(ii) De 10 minsta tal som går jämnt in i 12600, m.a.o. de 10 minsta tal som uppstår som kombinationer av dess primtalsfaktorer, är just

$$1,\ 2,\ 3,\ 4(=2 \cdot 2),\ 5,\ 6(=2 \cdot 3),\ 7,\ 8(=2 \cdot 2 \cdot 2),\ 9(=3 \cdot 3),\ \text{och } 10(=2 \cdot 5).$$

2. Först gäller det att ta fram det största sådana tal, dvs $\mathrm{SGD}(990, 408)$. Man kan göra detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned}990 &= 2 \cdot 408 + 174 \\ 408 &= 2 \cdot 174 + 60 \\ 174 &= 2 \cdot 60 + 54 \\ 60 &= 1 \cdot 54 + 6 \\ 54 &= 9 \cdot 6 + 0,\end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(990, 408) = 6$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för de bägge talen :

$$\begin{aligned}990 &= 2 \cdot 495 = 2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11, \\ 408 &= 2 \cdot 204 = 2 \cdot 2 \cdot 102 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 51 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17,\end{aligned}$$

från vilka vi också ser att $\mathrm{SGD}(990, 408) = 2 \cdot 3 = 6$.

De tal som går jämnt in i bägge talen är därmed alla talen som går jämnt in i 6, nämligen 1,2,3 och 6.

3. Vi börjar med att ta reda på vilket triangeltal ligger närmast 2450. Med tanke på att $2450 \times 2 = 4900 = 70 \times 70$, så bör det 70:e t-talet ligga i närheten. Det 70:e t-talet ges exakt av

$$\frac{70 \times 71}{2} = 2485.$$

Detta är alltså det första t-talet i det givna intervallet. Det 71:a t-talet är $2485 + 71 = 2556$, som också ligger i intervallet. Det 72:a t-talet är $2556 + 72 = 2628$ som gör detsamma. Det 73:e t-talet är $2628 + 73 = 2711$, som ligger utanför.

Svaret är alltså att det finns 3 st triangeltal mellan 2450 och 2650, nämligen 2485, 2556 och 2628, som är de 70:e, 71:a och 72:a t-talen respektivt.

4. Om vi börjar med talet 344×266 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 344 grupper av bollar med 266 st i varje. Tar vi bort tre bollar från varje grupp så har vi 344 grupper med 263 i varje. Lägger vi till tre nya sådana grupper, så har vi 347 grupper med 263 i varje, och därmed 347×263 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $3 \cdot 344$ bollar, och lagt till $3 \cdot 263$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $3 \cdot 344 - 3 \cdot 263 = 3 \cdot (344 - 263) = 3 \cdot 81 = 81 + 81 + 81 = 243$ bollar, som innebär att

$$344 \times 266 - 347 \times 263 = 243.$$

5 (i) 6^{11} olika utgångar.
(ii) $C(16, 6) = 8008$ olika sätt.
(iii) De två essen kan väljas på $C(4, 2) = 6$ olika sätt. Detsamma gäller för de två 2:orna. 3:an kan väljas på $4 = C(4, 1)$ olika sätt. Antalet sätt att kombinera dessa val till en pokerhand är alltså, enligt multiplikationsprincipen, $6 \times 6 \times 4 = 144$ sätt.

6. Ett tal som lämnar resten 3 vid division med 4 är ett udda tal. Därmed är alla dess primtalsfaktorer udda också. Varje udda tal lämnar antingen 1 eller 3 i rest vid division med 4. Men ett tal är lika med produkten av alla dess primtalsfaktorer. Det räcker nu att konstatera att produkten av två tal som båda lämnar rest 1 vid division med 4 gör detsamma, eftersom detta innebär direkt att om alla vårt tals primtalsfaktorer lämnade resten 1 så skulle deras produkt, nämligen vårt tal, göra detsamma, en motsägelse.

För att vara helt rigoröst, så återstår det att motivera påståendet ovan, som jag nu repeterar :

Om var och ett av två givna tal lämnar rest 1 vid division med 4, så gör deras produkt detsamma

Detta kan förklaras på många olika sätt. Här väljer jag en kortfattad algebraisk förklaring. Låt talen kallas för A och B. Att båda två lämnar rest 1 vid division med 4 innebär att det finns heltal m och n så att

$$A = 4m + 1, \qquad B = 4n + 1.$$

Men då har vi att

$$\begin{aligned} A \cdot B = (4m+1) \cdot (4n+1) &= 4m \cdot 4n + 4m \cdot 1 + 4n \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 16mn + 4m + 4n + 1 = 4(4mn + m + n) + 1, \end{aligned}$$

dvs vi får ännu ett tal på formen '4 gånger någonting, plus ett'. M.a.o. har vi ännu ett tal som lämnar rest 1 vid division med 4.

7 (i) Utgångspositionen är $(20, 14)$. Man borde antingen gå diagonalt till $(16, 10)$ eller rakt upp till $(9, 14)$.
(ii) Rutorna längs denna diagonal ges av $(x, x+7)$ där x löper över alla positiva heltalen. Vi söker alltså en B-gynnande position av denna form, och den är positionen $(12, 19)$. Man måste alltså gå ner till den 12:e raden för att hitta en position som gynnar B.