

MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Peter Hegarty

Dag : 020103 Tid : 8.45 - 13.45.
Hjälpmedel : Inga
Vakt : Anders Claesson 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebra, del 1 (MAN 010)

≥ 12 poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgiften och grupparbeten, ger godkänt. ≥ 18 poäng ger väl-godkänt. Dessa gränser kan minskas efteråt.

1 (3p) Det är ett faktum (som ni kanske har lärt er på gymnasiet) att $(1 + 1/n)^n < e$ för varje naturligt tal n . Med hjälp av detta faktum (eller på något annat sätt) bevisa att, för varje naturligt tal n ,

$$n! > n^n e^{-n}$$

2 (1.5p+1.5p) Ett gäng på 18 ungdomar, 10 killar och 8 tjejer, ska delas upp i par. På hur många olika sätt kan detta ske om

- (i) varje tjej måste paras med en kille.
- (ii) parningen sker helt fritt.

3 (3p) Minst en av rötterna till polynomet

$$p(z) := z^5 - 8z^4 + 23z^3 - 52z^2 + 76z - 80$$

är rent imaginär. Med hjälp av detta, lös ekvationen $p(z) = 0$ fullständigt.

4 (3p+1p) (i) Ange ett primtal p som satisfierar

$$p \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p \equiv 2 \pmod{5}$$

$$p \equiv 3 \pmod{7}$$

(ii) Med hjälp av följande sats av Dirichlet, visa att det faktiskt finns oändligt många primtal som satisfierar ovanstående villkor.

Dirichlets sats: Om a och b är heltal så att $\text{SGD}(a, b) = 1$, då finns det oändligt många heltal n så att $a + bn$ är ett primtal.

5 (3p) Formulera och bevisa Lagranges sats om ändliga grupper.

6 (3p) Bevisa att $\sqrt[3]{7}$ inte är ett rationellt tal.
(Ledning: Imitera beviset av någon sats ni har lärt er.)

7 (3p) Betrakta funktionen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ där

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^{x^2-3x+2} - e^{-x^3+3x^2-2x} \right)$$

Avgör om f är injektiv/surjektiv/bijektiv.

8 (3p) Det är en berömd sats av Lagrange att varje naturligt tal n kan skrivas som summan av kvadraterna av 4 eller färre heltal. Bevisa att Lagranges sats är den "bästa möjliga" genom att (med bevis) ange en oändlig mängd av naturliga tal, varav inget kan skrivas som summan av kvadraterna av tre eller färre heltal.
(Ledning: tänk modulo ett lämpligt heltal.)

Obs! Tentan beräknas vara färdiggrättad den 7 januari. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.