Tentamenskrivning i Algebra, del 1 02-01-03

Lösningar

F.1 (i) Vi kan använda induktion. För $n = 1$ kollar vi att

$$\mathrm{VL} = 1! = 1 > 1^1 e^{-1} = \frac{1}{e} = \mathrm{HL}.$$

Antag nu att, för något $n \geq 1$,

$$n! > n^n e^{-n}. \tag{1}$$

Vi skall försöka visa att

$$(n+1)! > (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}. \tag{2}$$

Men $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ så (1) medför på en gång att

$$(n+1)! > (n+1) n^n e^{-n}. \tag{3}$$

HL av (3) kan skrivas som

$$(n+1) n^n e^{-n} = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \right]^{-1}.$$

Och det är givet att

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < 1,$$

från vilket (2) följer.

F.2 (i) Först väljer vi vilka två killar som ska vara ett par. Vi har $\binom{10}{2}$ val för detta. Då kan de kvarstående 8 killarna paras med de 8 tjejerna på 8! sätt. Svaret är alltså, enligt multiplikationsprincipen, $\binom{10}{2} \cdot 8!$.

(ii) Svaret är (ni har gjort flera liknande övningar - t.ex. F.12(ii) på inlämningsuppgiften)

$$\frac{18!}{9!\,(2!)^9}.$$

F.3 Vi vet att det finns en rot av formen $z = \alpha i$ för något reellt tal α. Sätt in i ekvationen $p(z) = 0$, så får vi att

$$\begin{aligned}
&(\alpha i)^5 - 8(\alpha i)^4 + 23(\alpha i)^3 - 52(\alpha i)^2 + 76(\alpha i) - 80 = 0, \\
&\quad \Rightarrow (-8\alpha^4 + 52\alpha^2 - 80) + i(\alpha^5 - 23\alpha^3 + 76\alpha) = 0,
\end{aligned}$$

som ger de två ekvationerna

$$-8\alpha^4 + 52\alpha^2 - 80 = 0, \tag{4}$$

$$\alpha^5 - 23\alpha^3 + 76\alpha = 0. \tag{5}$$

Notera att $\alpha = 0$ löser (5) men inte (4), så vi kan ersätta (5) med

$$\alpha^4 - 23\alpha^2 + 76 = 0. \tag{6}$$

Men vi ser direkt att (6) faktoriserar som

$$(\alpha^2 - 19)(\alpha^2 - 4) = 0,$$

och har alltså de fyra lösningarna $\alpha = \pm\sqrt{19}, \pm 2$. Då får man kolla att $\alpha = \pm 2$ också löser (4).

Då har vi hittat två rötter, nämligen $z = \pm 2i$. Därför är $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$ en faktor till $p(z)$, och divisionsalgoritmen ger att

$$\frac{z^5 - 8z^4 + 23z^3 - 52z^2 + 76z - 80}{z^2 + 4} = z^3 - 8z^2 + 19z - 20 := q(z).$$

Antag nu att examinatoren är snäll, så att $q(z)$ har minst en rationell rot $\beta = \frac{p}{q}$. Sats 7.27 medför att $q \mid 1$ och $p \mid -20$, som ger möjligheterna $\beta = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$. Man får kolla direkt att $\beta = 5$ är en rot. Alltså, $z - 5$ är en faktor och divisionsalgoritmen ger

$$\frac{z^3 - 8z^2 + 19z - 20}{z - 5} = z^2 - 3z + 4 := r(z).$$

Den vanliga formeln ger de två röttena till $r(z)$, nämligen $\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{7}i\right)$.

Svar : Ekvationen $p(z) = 0$ har de 5 lösningarna

$$\pm 2i, \; 5, \; \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{7}i\right).$$

F.4 **(i)** Den Kinesiska Restsatsen medför att det finns oändligt många HELtal N som satisfierar de tre kongruenserna. Alla sådana N ges av

$$N = N_0 + (3 \cdot 5 \cdot 7)n,$$

där $n \in \mathbf{Z}$ och

$$N_0 = 1 \cdot b_1 \cdot (5 \cdot 7) + 2 \cdot b_2 \cdot (3 \cdot 7) + 3 \cdot b_3 \cdot (3 \cdot 5),$$

där b_1, b_2, b_3 är godtyckliga heltal som satisfierar

$$(5 \cdot 7)b_1 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$(3 \cdot 7)b_2 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$(3 \cdot 5)b_3 \equiv 1 \pmod 7.$$

Det är lätt att se direkt att, t.ex., $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ löser ovanstående kongruenser. Då får vi att alla lösningarna till de ursprungliga tre kongruenserna ges explicit av

$$N = 157 + 105n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{7}$$

Det är nu lätt att kolla att 157 är ett primtal.

(ii) Det räcker, enligt (7), att bevisa att det finns oändligt många n så att $157 + 105n$ är ett primtal. Men detta följer från Dirichlets sats, eftersom $\mathrm{SGD}(157, 105) = 1$.

(T.ex.: Tag $n = 2$. Då får man kolla att $157 + 105 \cdot 2 = 367$ är ett primtal och därmed en alternativ lösning till del **(i)**).

F.5 Sats 3.9 i 'Aritmetik och Algebra' eller Sats 9.6 i mina anteckningar.

F.6 Man borde imitera beviset av satsen av Pythagoras att $\sqrt{2}$ är irrationellt (Sats 2.16 i boken). Dvs, antag att $\sqrt[3]{7}$ ÄR ett rationellt tal, säg p/q, där $\mathrm{SGD}(p,q) = 1$. Vi ska få fram en motsägelse ut av detta. Kubera, så har vi att

$$7 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow p^3 = 7q^3. \tag{8}$$

Alltså $7 \mid p^3$ och därför, eftersom 7 är ett primtal, Aritmetikens Fundamentalsats medför att $7 \mid p$. Låt $p = 7r \Rightarrow p^3 = 7^3 r^3$. Substituera in i (8), så har vi att

$$49r^3 = q^3.$$

Alltså $7 \mid q^3$ och en ny tillämpning av AFS medför att $7 \mid q$. Men nu har vi visat att 7 delar både p och q, som säger emot att $\mathrm{SGD}(p,q) = 1$.

F.7 Notera att vi har faktoriseringarna

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= (x-1)(x-2), \\ -x^3 + 3x^2 - 2x &= -x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Då har vi att

$$f(1) = f(2) = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^0\right) = 0,$$

som visar att f INTE är INJEKTIV.

Å andra sidan påstår jag att f är surjektiv. Eftersom f är en kontinuerlig funktion räcker det, pga Medelvärdesatsen, om vi kan visa att $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ och att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$. Men dessa fakta är klara. För när $x \to +\infty$ så dominerar den positiva exponentialen e^{x^2-3x+2} som blir stor och positiv. När $x \to -\infty$ blir både termerna stora och positiva, men $-x^3$ dominerar x^2, så i detta fall dominerar termen $e^{-x^3+3x^2-2x}$ och f går mot $-\infty$.

Svar : f är surjektiv men inte injektiv.

F.8 Jag påstår att inget heltal kongruent med 7 modulo 8 kan skrivas som summan av kvadraterna av tre eller färre heltal. För man får kolla att kvadraten av varje heltal är kongruent till 0,1 eller 4 modulo 8, och det finns ingen lösning till ekvationen

$$7 = a + b + c,$$

där var och ett av a, b, c är lika med 0,1 eller 4.