

MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Peter Hegarty

Dag : 011027 Tid : 8.45 - 13.45.
Hjälpmedel : Inga
Vakt : Sergei Kitaev 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebra, del 1 (MAN 010)

≥ 12 poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgiften och grupparbeten, ger godkänt. ≥ 18 poäng ger väl-godkänt. Dessa gränser kan minskas efteråt.

1 (2p+2p). Låt n vara ett positivt heltal. Bevisa att

(i)

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{\sqrt{5n}},$$

(ii)

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

2 (1p+2p). (i) Låt oss säga att 55 personer gör tentan idag. Varje person kommer att få ett av 3 möjliga resultat : U, G eller VG. Hur många möjligheter finns det alltså för den kompletta resultat listan ? (hur ni ordnas på listan är irrelevant - det finns antagligen någon logik bakom hur det avgörs !).

(ii) Antag nu att följande enkla markeringsystem gäller för tentan (det är inte så, förresten !) : (a) att för varje uppgift får du antingen alla poängen eller inga (b) att du har med dig antingen 0 eller +3 bonuspoäng från kursarbetet.

På hur många olika sätt kan du nu fixa VG, dvs minst 18 poäng ? (t.ex. ett sätt är att ha +3 i bonus, och svara rätt på uppgifter 1,2,3,4,5 och fel på de andra).

3 (3p). Minst en av rötterna till polynomet

$$p(z) := z^5 - z^4 + 10z^3 - 15z^2 + 9z - 54$$

är rent imaginär. Lös nu $p(z) = 0$ i sin helhet.

4 (3p). Formulera och bevisa Aritmetikens Fundamentalsats.

5 (1.5p+1.5p). (i) Låt z, w vara komplexa tal, med $w \neq 0$. Bevisa att

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(ii) Ange en funktion $f(x, y)$ av två variabler så att, för alla $\theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos 7\theta = f(\cos \theta, \sin \theta).$$

6 (1.5p+1.5p). (i) Låt G vara en abelsk grupp. Sätt

$$H := \{y \in G : y = x^3 \text{ för något } x \in G\}.$$

Bevisa att H är en delgrupp till G .

(ii) Genom att betrakta gruppen $G = S_4$, visa att resultatet från del (i) inte kan utvidgas till icke-abelska grupper.

7 (3p). Kl. 10 på morgonen går Herr Olsson in i HP och köper 16 äpplen, 7 apelsiner och 21 bananer. Det kostar honom 275 kr. Tio minuter senare går Fru Gillo in och köper 8 äpplen, 15 apelsiner och 29 bananer, för 299 kr. totalt. Om varje frukt kostar ett heltal kronor, avgör hur mycket ett äpple, en apelsin och en banan kostar.

8 (3p). Låt x vara ett naturligt tal så att $x^3 + x$ är en perfekt fjärdepotens. Bevisa att $16 \mid x$.

(Ledning : tänk modulo 8).

Obs! Tentan beräknas vara färdigriktad den 1 november. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.