Tentamenskrivning i Algebra, del 1 01-10-27

Lösningar

F.1 (i) Vi kan använda induktion. För $n = 1$ kollar vi att

$$\mathrm{VL} = \binom{2}{1} = 2 > \frac{2^2}{\sqrt{5}} = \mathrm{HL}.$$

Antag nu att, för något $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{\sqrt{5n}}. \tag{1}$$

Vi skall försöka visa att

$$\binom{2n+2}{n+1} > \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{5(n+1)}}.$$

Nu har vi alltså att

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} &= \tfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \tfrac{(2n)!}{n!\,n!}\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \binom{2n}{n}\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &> \tfrac{2^{2n}}{\sqrt{5n}}\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}, \quad \text{enligt (1),} \end{aligned}$$

så det räcker att visa att

$$\begin{array}{rccc} & \tfrac{2^{2n}}{\sqrt{5n}}\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} & > & \tfrac{2^{2n+2}}{\sqrt{5(n+1)}} \\ \Leftrightarrow & \tfrac{(2n+1)(2n+2)}{\sqrt{n}(n+1)^2} & > & \tfrac{4}{\sqrt{n+1}} \\ \Leftrightarrow & \tfrac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{n(n+1)^4} & > & \tfrac{16}{n+1} \\ \Leftrightarrow & (2n+1)^2(2n+2)^2 & > & 16n(n+1)^3 \\ \Leftrightarrow & 16n^4+48n^3+52n^2+24n+4 & > & 16n^4+48n^3+48n^2+16n \\ \Leftrightarrow & 4(n+1)^2 & > & 0, \end{array}$$

som naturligtvis stämmer.

(ii) Se mina tilläggsanteckningar, Sats 3.2.

F.2 **(i)** 3^{55} enligt multiplikationsprincipen.

(ii) Betrakta bonuspoängen som en nionde uppgift, så att tentan består av nio uppgifter, därav en är värd 4 poäng, och de andra 3 poäng var. För att fixa VG måste man nå 18 poäng, och man konstaterar att detta är ekvivalent med att svara rätt på minst 6 uppgifter. Man har nio st. att välja ifrån och måste svara rätt på antingen 6,7,8 eller 9 st. Antalet olika sätt att fixa VG är alltså

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 84 + 36 + 9 + 1 = 130.$$

F.3 Vi vet att det finns en rot av formen $z = \alpha i$ för något reellt tal α. Sätt in i ekvationen $p(z) = 0$, så får vi att

$$(\alpha i)^5 - (\alpha i)^4 + 10(\alpha i)^3 - 15(\alpha i)^2 + 9(\alpha i) - 54 = 0,$$
$$\Rightarrow (-\alpha^4 + 15\alpha^2 - 54) + i(\alpha^5 - 10\alpha^3 + 9\alpha) = 0,$$

som ger de två ekvationerna

$$-\alpha^4 + 15\alpha^2 - 54 = 0, \tag{2}$$
$$\alpha^5 - 10\alpha^3 + 9\alpha = 0. \tag{3}$$

Notera att $\alpha = 0$ löser (3) men inte (2), så vi kan ersätta (3) med

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 9 = 0. \tag{4}$$

Men vi ser direkt att (4) faktoriserar som

$$(\alpha^2 - 9)(\alpha^2 - 1) = 0,$$

och har alltså de fyra lösningarna $\alpha = \pm 3, \pm 1$. Då får man kolla att $\alpha = \pm 3$ också löser (2).

Då har vi hittat två rötter, nämligen $z = \pm 3i$. Därför är $(z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9$ en faktor till $p(z)$, och divisionsalgoritmen ger att

$$\frac{z^5 - z^4 + 10z^3 - 15z^2 + 9z - 54}{z^2 + 9} = z^3 - z^2 + z - 6 := q(z).$$

Antag nu att examinatoren är snäll, så att $q(z)$ har minst en rationell rot $\beta = \frac{p}{q}$. Sats 7.27 medför att $q \mid 1$ och $p \mid -6$, som ger möjligheterna $\beta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Man får kolla direkt att $\beta = 2$ är en rot. Alltså, $z - 2$ är en faktor och divisionsalgoritmen ger

$$\frac{z^3 - z^2 + z - 6}{z - 2} = z^2 + z + 3 := r(z).$$

Den vanliga formeln ger de två röttena till $r(z)$, nämligen $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{11}i\right)$.

Svar : Ekvationen $p(z) = 0$ har de 5 lösningarna

$$\pm 3i, \; 2, \; \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{11}i\right).$$

F.4 Satser 2.6 och 2.14 i boken 'Algebra och Geometri'.

F.5 **(i)** Låt $z = a + ib$ och $w = c + id$, där $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Först har vi att

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \\ = \frac{1}{c^2 + d^2} &\left[(ac + bd) + i(bc - ad)\right], \end{aligned}$$

så att

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{c^2 + d^2}\left[(ac + bd) + i(ad - bc)\right].$$

Dessutom har vi att

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a - ib}{c - id} &= \frac{(a - ib)(c + id)}{c^2 + d^2} \\ = \frac{1}{c^2 + d^2} &\left[(ac + bd) + i(ad - bc)\right] \\ &= \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}, \quad \text{v.s.v..} \end{aligned}$$

(ii) Enligt De Moivres sats, för $n \in \mathbf{N}$ och $\theta \in \mathbf{R}$, så har vi att

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Men enligt binomialsatsen har vi också att

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k.$$

Tag nu $n = 7$, så får vi att

$$\cos 7\theta + i\sin 7\theta = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (\cos\theta)^{7-k}(i\sin\theta)^k. \tag{5}$$

Jämför nu de reella delarna av båda ledarna i (5). Notera att i summan i HL får vi någonting reellt för $k = 0, 2, 4, 6$. Därmed får vi följande ekvation

$$\begin{aligned}\cos 7\theta &= \cos^7\theta - \binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta + \binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta - \binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta \\ &= = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta.\end{aligned}$$

Då borde vi ta

$$f(x, y) = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6.$$

F.6 (i) Man måste visa att H är sluten under både multiplikation och inversion.

Multiplikation : Låt $y_1, y_2 \in H$. Då finns det $x_1, x_2 \in G$ så att

$$y_1 = x_1^3, \qquad y_2 = x_2^3.$$

Men eftersom G är abelsk, då har vi att

$$y_1y_2 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 \quad\Rightarrow\quad y_1y_2 \in H.$$

Inversion : (Notera att följande argument även gäller för icke-abelska grupper). Låt $y \in H$. Alltså finns det $x \in G$ så att $y = x^3$. Men då $y^{-1} = (x^3)^{-1} = (x^{-1})^3 \Rightarrow y^{-1} \in H$.

(ii) Gruppen S_4 har $4! = 24$ element, varav 1 har ordning 1, 9 har ordning 2, 8 har ordning 3 och 6 har ordning 4. I cykelnotation ges de 9 elementen av ordning 2 av

$$(12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23).$$

De 8 elementen av ordning 3 ges av

$$(123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243).$$

Och till slut de 6 elementen av ordning 4 ges av

$$(1234),\ (1432),\ (1243),\ (1342),\ (1324),\ (1423).$$

Låt nu $H = \{y \in S_4 : y = x^3 \text{ för något } x \in S_4\}$.

Identiteten $(1) \in H$ eftersom $(1) = (1)^3$. Varje element av ordning 2 ligger i H eftersom, om $o(y) = 2$ då $y = y^3$. PSS ligger varje element av ordning 4 i H eftersom $o(y) = 4 \Rightarrow y = (y^{-1})^3$. Då har vi att minst $1 + 9 + 6 = 16$ element ligger i H. Men inget element av ordning 3 ligger i H eftersom om $o(y) = 3$ och $y = x^3$, så måste $o(x) = 9$, och S_4 har inga element av ordning 9.

Slutsatsen är alltså att $o(H) = 16$ och eftersom 16 inte delar 24, så kan H inte vara en delgrupp till S_4, enligt Lagranges sats.

Notera, alternativt, att H inte är sluten under multiplikation eftersom $(12) \in H$ och $(13) \in H$ men $(12)(13) = (123) \notin H$. Å andra sidan, som vi visade i del **(i)**, är ju H sluten under inversion.

F.7 Låt ett äpple, en apelsin och en banan kosta x, y resp. z kronor. Då har vi de två ekvationerna

$$16x + 7y + 21z = 275, \tag{6}$$
$$8x + 15y + 29z = 299. \tag{7}$$

Multiplicera (7) med två och subtrahera (6) så får man ekvationen

$$23y + 37z = 323. \tag{8}$$

Notera att $\mathrm{SGD}(23, 37) = 1$. Euklides algoritm baklänges ger att

$$1 = 37 \cdot 5 - 23 \cdot 8,$$

som medför att den allmäna lösningen till (8) ges av

$$y = -8 \cdot 323 + 37n = -2584 + 37n, \tag{9}$$
$$z = 5 \cdot 323 - 23n = 1615 - 23n. \tag{10}$$

A priori måste vi ha $z \geq 0$. Dessutom medför (6) att $21z \leq 275 \Rightarrow z \leq 13$. Från (10) får vi då att

$$0 \leq 1615 - 23n \leq 13,$$

som lämnar ett unikt val för n, nämligen $n = 70$. Substitution i (9) och (10) ger $y = 6$, $z = 5$, och substitution av dessa in i (6) ger $x = 8$.

Svar : Ett äpple kostar 8 kr, en apelsin 6 kr och en banan 5 kr.

F.8 Notera att vii har faktoriseringen $x + x^3 = x(1 + x^2)$. Enligt hypotesen finns det ett heltal y så att

$$x(1 + x^2) = y^4.$$

Notera vidare att $\mathrm{SGD}(x, 1 + x^2) = 1$. Då följer det från Aritmetikens Fundamentalsats att det finns heltal z, w så att

$$x = z^4, \qquad 1 + x^2 = w^4.$$

Det räcker nu att bevisa att x är jämt. För i så fall är z också jämnt och därmed $16 \mid z^4$.

Så antag att x är udda. Då är $1 + x^2$ jämnt och därmed w också jämnt. Men då $16 \mid w^4$ så att $x^2 \equiv -1 \pmod{16}$. Speciellt är $x^2 \equiv -1 \pmod 8$. Men vi vet att för varje udda tal n, så $n^2 \equiv 1 \pmod 8$. Vi har alltså en motsägelse och beviset är därmed klart.