

MATEMATIK  
Göteborgs Universitet  
Peter Hegarty

Dag : 040604 Tid : 8.45 - 13.45.  
Hjälpmedel : Inga  
Vakt : Håkan Samuelsson 0740-350646.

**Tentamenskriving i Diskret Matematik (MAN 240)**

$\geq 13$  poäng, inkl. poängen från inlämningsuppgifterna, ger godkänt. Denna gräns kan minskas efteråt.

**1 (1.5p+1.5p) (i)** Sverige har tagit ut en trupp till EM som består av 23 spelare : 3 målvakter, 8 försvarare, 8 mittfältare och 4 anfallare. Det är troligt att Lars-Tommy väljer att spela 4-4-2, dvs målvakt + 4 försvarare + 4 mittfältare + 2 anfallare.

Hur många möjliga laguppställningar finns det alltså, om vi antar (något orealistiskt !) att inbördesordningen i varje lagdel är oväsentligt ?

**(ii)** Låt oss vara jätteoptimistisk och anta att Sverige gör 37 mål under turneringen. Hur många möjligheter finns det då för skytteligan ?

(T.ex. en möjlighet är : Zlatan 36 mål, H. Larsson 1 mål, alla de andra 21 spelarna 0 mål).

**2 (4x1p+2p).** Man hänvisas till grafen  $G$  i Fig. 13.17(b).

**(i)** Ange en Hamilton cykel i den 'oriktade' grafen  $G^*$  eller förklara varför ingen sådan existerar.

**(ii)** Ange  $\chi(G^*)$  och en explicit optimal färgning av  $G^*$ .

**(iii)** Ange ett spanning träd av minimal vikt i  $G^*$ .

**(iv)** Genomför Dijkstra's algoritim för att hitta en kortaste väg från  $a$  till  $z$  i  $G$  (skriv ner vilken kant du väljer i varje steg).

**(v)** Kör nu FF-algoritmen för att hitta ett maximalt flöde från  $a$  till  $z$  och en minimal cut-set (skriv ner vilken augmenting väg du väljer i varje steg).

**3 (3p).** Formulera och bevisa Philip Halls sats om matchningar i bipartite grafer.

**4 (3p).** Ange (i termer av fakultets funktioner) antalet permutationer

$$\pi : \{1, 2, \dots, 100\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 100\}$$

där inga två av  $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)$  är på varandra följande tal.

**5 (1p+1p+1p)** Formulera och bevisa recurrence relationer för

- (i) Stirling talen  $S(n, k)$ ,
- (ii) Catalan talen  $C_n$ ,
- (iii) antalet derangements  $d_n$  av  $n$  st. föremål.

**6 (3p).** Lös fullständigt följande recurrence relation (dvs ange en sluten formel för  $u_n$ ) :

$$\begin{aligned} 2u_n &= 7a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3^n \quad \forall n \geq 2, \\ u_0 &= 1, \quad u_1 = 1. \end{aligned}$$

**Obs!** Tentan beräknas vara färdig rättad den 11 juni. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.