

MATEMATIK  
Göteborgs Universitet  
Peter Hegarty

Dag : 010822 Tid : 8.45 - 13.45.  
Hjälpmedel : Inga  
Vakt : Anders Öhgren 0740-350646.

### Tentamenskriving i Algebraisk talteori (MAN 640)

**Obs!** I uppgifter nr. 2,4,6,8 betyder ett 'bevis' att om du använder något resultat från föreläsningarna, då måste det bevisas. I uppgifter nr. 1,3,5,7 kan resultat från föreläsningarna användas utan bevis (om de behövs !). I uppgift nr. 2 kan standardfakta från t.ex. flervariabelanalys användas utan bevis.

$\geq 12$  poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgifterna, ger godkänt. Denna gräns kan minskas efteråt.

**1 (3p).** Låt  $a, b > 2$  vara heltal. Bevisa att  $2^a + 1$  är inte delbar med  $2^b - 1$ .

**2 (3p).** Låt  $n \in \mathbf{N}$  och  $\chi$  vara en Dirichlet karaktär modulo  $n$ . För  $\text{Re}(s) > 1$ , sätt  $L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n)/n^s$ . Bevisa att, för godtycklig  $\chi$ , L-funktionen kan fortsättas till en meromorfsk funktion i  $\text{Re}(s) > 0$ . I vilka fall är den fortsatta funktionen holomorfsk ?

**3 (3p).** (i) Ange alla udda primtal som kan uttryckas i formen  $x^2 + xy + 4y^2$ , där  $x, y \in \mathbf{Z}$ .

**4 (0.2p+2.8p).** (i) Låt  $m, n$  vara udda heltal. Definiera symbolen  $\left(\frac{m}{n}\right)$ .  
(ii) Bevisa att om  $m, n$  är relativt prima, då gäller att

$$\left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$

**5 (3p).** Låt  $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ . Ange alla primtal som ramifierar i  $K$ .

**6 (3p).** Låt  $A$  vara en ring,  $M$  en  $A$ -modul och  $N$  en  $A$ -delmodul till  $M$ . Bevisa att  $M$  är Noetersk omm både  $N$  och  $M/N$  är Noeterska.

**7 (3p).** Faktorisera huvudidéalet  $\langle 4 + 3\sqrt{-11} \rangle$  i  $O_K$ , där  $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-11}]$ .

- 8 (3p+1p).** (i) Ange ALLA lösningar  $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$  till ekvationen  $x^2 - 11y^2 = 1$  ? Bevisa ditt svar.  
(ii) Ange en fundamental enhet i  $\mathbf{Q}(\sqrt{11})$ .

**Obs!** Tentan beräknas vara färdigrättad den 24 augusti. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.