Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2015-01-02 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Gustav Kettil, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Planet $x + y + z = 12$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ i en ... (fyll i ordet !). Bestäm de punkter på skärningskurvan som ligger närmast respektivt längst ifrån origo. (5p)

7. (a) Bestäm volymen av det område som ligger innanför både $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ och $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (4p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x^2 + 3y,\, \cos y^2,\, z^3)$ och $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan ytorna $z = 4 - x^2 - y^2$ och $x^2 + z^2 = 1$ med $y > 0$, orienterad medurs sett från långt ut på den positiva y-axeln. (5p)

8. Visa att om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är virvelfria vektorfält från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$, då är fältet $\mathbf{H} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ källfritt. (4p)

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $f(x,\, y,\, z) = 3x^2 - y^2 + 4z^2$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x,\, y,\, z) = 6$ i punkten $(1,\, 1,\, 1)$. Bestäm även riktningsderivatan till f i denna punkt i riktningen $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1,\, 1)$ för funktionen $f(x,\, y) = \ln(x + y) + \sin(x - y)$. Ange svaret på formen $f(1 + h,\, 1 + k) \approx \ldots$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$, där $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 2t$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

(a) Förklara varför funktionen f måste ha både ett globalt maximum och minimum i hela $\mathbb{R}^2$. (1p)

(b) Bestäm dessa globala extremvärden. (4p)

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-01-02	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. (a) Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\mathbf{F} = (xe^y, y^2)$ först längs kurvan $y = x^2$ från (0, 0) till (1, 1) och sedan tillbaka till (0, 0) längs kurvan $y = x$

i. genom att räkna ut kurvintegralerna direkt. (3p)

ii. genom att använda Greens sats. (2p)

(Tips: $\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C$.)

(b) Ange en funktion $f(x, y)$ sådan att fältet $\mathbf{G} = \mathbf{F} + f(x, y)\mathbf{j}$ är konservativt. (2p)

4. (a) Beräkna arean av den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet. (2p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy, e^x z^2, x^2 + z)$ upp genom den delen av ytan. (4p)

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{e^{x^2}}{x}\,dA$ över området D i planet som begränsas av $y = 0$, $y = x^2$ och $x = 1$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm masscentrumet för den solida halvkonen $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, om densiteten i punkten (x, y, z) ges av $\rho(x, y, z) = z$. (3p)

(TIPS: Massan av halvkonen är $\pi/4$, detta kan man ta som givet.)

Lösning:

Svar: ....