Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2015-01-05 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Dawan Mustafa, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Betrakta ytan Y som ges av ekvationen $x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 2$.

(a) Parametrisera ytan och bestäm vektorytareaelementet $d\mathbf{S}$ $(= \widehat{\mathbf{N}} dS)$. (3p)

(b) Låt $\mathbf{F} = e^{x^2} y\,\mathbf{i} + \frac{\sin z}{z}\,\mathbf{j} + e^{yz}\,\mathbf{k}$. Bestäm flödet ut ur Y. (3p)

7. (a) Om $f(x)$ är en funktion av en variabel med en kontinuerlig andra derivata och $c \neq 0$ är en konstant, bevisa att funktionen $g(x,\, t) = f(x - ct) + f(x + ct)$ uppfyller den så kallade vågekvationen (3p)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

(b) Använd kedjeregeln för att bevisa formeln för riktningsderivatan av en differentierbar funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, i riktningen $\mathbf{u}$: $D_{\mathbf{u}} h = \nabla h \bullet \mathbf{u}$. (3p)

8. Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$ genom att:

(a) använda definitionerna för **div** och **curl** och räkna ut uttrycket. (3p)

(b) använda lämpliga satser för att visa att $\iiint_M \mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F}\, dV = 0$ för alla mängder $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Här får ni använda att om man har en kontinuerlig funktion f och $\iiint_M f dV = 0$ för alla M, så är även $f = 0$, en konsekvens av medelvärdessatsen. (3p)
Tips: Randen till en sluten yta är tom.

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-01-05	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm huruvida följande mängder är öppna, slutna eller varken eller. Motivera kort. (3p)

i. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
ii. $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$.
iii. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning:

Svar: ....

(b) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (\sin(t),\, t^2,\, t^6 - e^t)$. Bestäm den punkt där hastigheten är $(1,\, 0,\, -1)$, och beräkna accelerationen i denna punkt. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Parametrisera kurvan som ges av ekvationen $x^2 + 2x + y^2 = 8$ på formen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ för lämpliga a och b. Ange dessutom en formel för en tangentvektor av enhetslängd i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

(a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (4p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för f i punkten $(2, -1)$. Ange svaret på formen $f(2 + h, -1 + k) \approx \ldots$. (2p)

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2015-01-05	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. Låt $\mathbf{F} = -ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ för några konstanter a och b.

(a) Låt C vara randen till ett område D med inducerad orientering. Formulera Greens sats för paret C och D, och bestäm en relation mellan a och b så att $\oint_C \mathbf{F} \bullet dr = \text{Area}(D)$. (2p)

(b) Använd sedan $\oint_C \mathbf{F} \bullet dr$ för att räkna ut arean av området som ligger innanför kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 3(\cos(t)+\sin(t))\mathbf{i}+2(\sin(t)-\cos(t))\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (3p)

4. Låt $\mathbf{F} = (y^2,\, x + yz,\, z)$.

(a) Bestäm **div** och **curl** av $\mathbf{F}$. (2p)

(b) Beräkna flödet upp ur halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$. (3p)

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt $\mathbf{F} = (2xy + z^3,\ x^2 + 2yz,\ y^2 + 3xz^2 + 1)$.

i. Vektorfältet är konservativt. Bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

ii. Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs en godtycklig kurva som börjar i $(0, 0, 0)$ och slutar i $(1, 2, 1)$. (1p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 + y^2 + 1$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 9$. (3p)

Lösning:

Svar: ....