Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2014-10-30 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 2-3

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 4-5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm $\iint_D x\,dx\,dy$ där D är parallellogrammet som begränsas av de fyra linjerna $x+y=1$, $x+y=3$, $2x-y=2$ och $2x-y=4$. (5p)

7. (a) Formulera Gauss divergenssats och bevisa den för en kub $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$. (4p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (\sin x^2,\, y^3,\, z\ln z - x)$ och $\mathcal{C}$ är skärningen mellan ytorna $z = x^2+y^2-4$ och $z = 2y-1$, orienterad medurs sett uppifrån på z-axeln. (4p)

8. Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara glatta funktioner av t och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en differentierbar funktion av två variabler. Formulera och bevisa kedjeregeln för funktionen g av en variabel som ges av $g(t) = f(x(t),\, y(t))$. (5p)

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys E2 2014-10-30**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan $D_u f$ av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$ i punkten $(1, 1)$ och riktningen $u = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial s} f(x, y)$ och $\frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, y)$ i termer av de partiella derivatorna till $f(x, y)$, där $x = e^s, y = s^2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara given av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+yz,\ z^2-e^x,\ 2yz^2)$. Bestäm Jacobimatrisen till $\mathbf{F}$ i punkten $(0,\ 1,\ 1)$ och använd den för att bestämma ett approximativt värde till $\mathbf{F}(0.01,\ 0.99,\ 1.02)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,\ y,\ z) = x^3 + 2y^3 + 4z^3$.

(a) Med hjälp av Lagranges multiplikatormetod, bestäm de största och minsta värdena av f på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 21$. (4p)

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x,\ y,\ z) = 7$ i punkten $(1,\ 1,\ 1)$. (2p)

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. Beräkna $\oint_C y^2\,dx + x\,dy$ över randen, med moturs orientering, till högra halvan av enhetsskivan genom att

(a) parametrisera randen och räkna ut kurvintegralen. (3p)

(b) använda Greens sats. (2p)

4. Betrakta sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och halvkonen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Beräkna arean av den del av sfären som begränsas av halvkonen. (2p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy^2 + \frac{1}{2}x^2,\ x^2y + \ln z,\ \frac{1}{3}z^3 + e^{xy})$ ut ur det område som begränsas av sfären och halvkonen. (3p)

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})\,dA$ över området D i planet som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm konstanten A så att vektorfältet $\mathbf{F} = (2z^3,\ 2yz^3,\ 6xz^2 + Ay^2z^2)$ blir virvelfritt, och ta fram en potential till detta $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Ställ upp en trippelintegral som anger volymen av den tetraeder som begränsas av de tre koordinatplanen samt planet $x + y + z = 4$. Beräkna sedan trippelintegralen. (Obs! Inga poäng ges för hänvisning till en färdig formel för volymen av en tetraeder.) (2p)

Lösning:

Svar: ....