Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys E2

2014-10-30 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-5

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 6-7

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm $\iint_D x\,dx\,dy$ där D är parallellogrammet som begränsas av de fyra linjerna $x+y=1$, $x+y=3$, $2x-y=2$ och $2x-y=4$. (5p)

Lösning: Vi byter variabler enligt

$$u = x + y, \qquad v = 2x - y.$$

Då har vi

$$du\,dv = \frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| dx\,dy = 3\,dx\,dy. \tag{1}$$

Vi behöver också ta reda på inverssubstitutionen. I matrisform gäller

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Så $x = \frac{1}{3}(u+v)$ som tillsammans med (1) innebär att dubbelintegralen i termer av u och v blir

$$\int_2^4 \int_1^3 \frac{1}{3}(u+v)\left(\frac{1}{3}du\,dv\right) = \frac{1}{9}\left(\int_2^4 dv \int_1^3 u\,du + \int_1^3 du \int_2^4 v\,dv\right) = \cdots = \frac{20}{9}.$$

7. (a) Formulera Gauss divergenssats och bevisa den för en kub $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$. (4p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (\sin x^2,\, y^3,\, z \ln z - x)$ och $\mathcal{C}$ är skärningen mellan ytorna $z = x^2 + y^2 - 4$ och $z = 2y - 1$, orienterad medurs sett uppifrån på z-axeln. (4p)

Lösning (a): Se avsnitt 16.4 i boken och/eller föreläsningsanteckningarna.

(b): Stokes sats medför att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS, \tag{2}$$

där $\mathcal{S}$ är den del av paraboloiden $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ som ligger under, och därmed begränsas av planet. Först har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin x^2 & y^3 & z \ln z - x \end{vmatrix} = \cdots = \mathbf{j}. \tag{3}$$

Näst har vi

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(f_x,\, f_y,\, -1)\, dx\, dy = \pm(2x,\, 2y,\, -1)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Eftersom vi går medurs längs $\mathcal{C}$ sett uppifrån så kommer $\mathcal{S}$ att ligger till vänster om färdriktningen, så $\hat{\mathbf{N}}$ ska peka ut från $\mathcal{S}$ och därmed neråt. Därför väljer vi plus tecknet i (4). Från (3) och (4) härleder vi sedan att

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = (0,\, 1,\, 0) \cdot (2x,\, 2y,\, -1) = 2y.$$

Insättning i (2) ger att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\pi(\mathcal{S})} 2y\, dx\, dy$$

där $\pi(\mathcal{S})$ är projektionen av $\mathcal{S}$ på xy-planet. Vi tar reda på projektionen genom att sätta

$$x^2 + y^2 - 4 = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4,$$

en cirkel av radie 2 med centrum i $(0, 1)$. Så $\pi(\mathcal{S})$ är insidan av denna cirkel. Notera att skivan är symmetrisk kring $y = 1$, så vi får slutligen

$$\iint_{\pi(\mathcal{S})} 2y\, dx\, dy = 2\iint_{\pi(\mathcal{S})} [(y-1)+1]\, dx\, dy = 2\iint_{\pi(\mathcal{S})} dx\, dy = 2 \times \text{Area}(\pi(\mathcal{S})) = 2(\pi(2^2)) = 8\pi.$$

8. Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara glatta funktioner av t och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en differentierbar funktion av två variabler. Formulera och bevisa kedjeregeln för funktionen g av en variabel som ges av $g(t) = f(x(t),\, y(t))$. (5p)

Lösning: Se Exempel 12.5.1 och/eller Sats 12.6.5 i boken och/eller föreläsningsanteckningarna.

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan $D_u f$ av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$ i punkten $(1, 1)$ och riktningen $u = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning: $\nabla f = (f_x,\, f_y) = (3x^2 + 3y^2,\, 6xy - 4y^3)$ så $\nabla f(1,\, 1) = (6,\, 2)$. Sedan har vi

$$D_u f = \nabla f \cdot u = (6,\, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{14}{\sqrt{5}}.$$

(b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial s} f(x, y)$ och $\frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, y)$ i termer av de partiella derivatorna till $f(x, y)$, där $x = e^s, y = s^2$. (3p)

Lösning: Enligt kedjeregeln är

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_x \cdot e^s + f_y \cdot 2s.$$

Sedan är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x + (2s) f_y) = \frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x) + \frac{\partial}{\partial s}(2s f_y). \tag{5}$$

Enligt produktregeln och kedjeregeln är

$$\frac{\partial}{\partial s}(e^s f_x) = e^s f_x + e^s(f_{xx} e^s + f_{xy}(2s)) = e^s f_x + e^{2s} f_{xx} + 2se^s f_{xy} \tag{6}$$

och på liknande vis är

$$\frac{\partial}{\partial s}(2s f_y) = 2f_y + 2s(f_{xy} e^s + f_{yy}(2s)) = 2f_y + 2se^s f_{xy} + 4s^2 f_{yy}. \tag{7}$$

Insättning av (6) och (7) in i (5) ger slutligen att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = e^s f_x + 2f_y + e^{2s} f_{xx} + 4se^s f_{xy} + 4s^2 f_{yy}.$$

(c) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara given av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+yz,\ z^2-e^x,\ 2yz^2)$. Bestäm Jacobimatrisen till $\mathbf{F}$ i punkten $(0, 1, 1)$ och använd den för att bestämma ett approximativt värde till $\mathbf{F}(0.01, 0.99, 1.02)$. (3p)

Lösning: Vi har

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -e^x & 0 & 2z \\ 0 & 2z^2 & 4yz \end{pmatrix},$$

så i punkten $(0, 1, 1)$ gäller

$$D\mathbf{F}(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\mathbf{F}(0, 1, 1) = (1, 0, 2)$ så approximationen lyder

$$\mathbf{F}(0.01, 0.99, 1.02) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.03 \\ 2.06 \end{pmatrix}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 4z^3$.

(a) Med hjälp av Lagranges multiplikatormetod, bestäm de största och minsta värdena av f på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 21$. (4p)

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 7$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

Lösning (a): Vi söker extremvärdena till $f(x, y, z)$ med bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ där $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 21$. Lagranges metod ger ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad &\Rightarrow \quad 3x^2 = \lambda(2x), \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad &\Rightarrow \quad 6y^2 = \lambda(2y), \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \quad &\Rightarrow \quad 12z^2 = \lambda(2z). \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger två möjligheter

$$x = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lambda = \frac{3x}{2},$$

den andra ger två möjligheter

$$y = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lambda = 3y,$$

och den tredje ger också två möjligheter

$$z = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lambda = 6z.$$

Sammanlagt har vi då 8 möjligheter:

$(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, $(0, 2z, z)$, $(4z, 0, z)$, $(2y, y, 0)$, $(4z, 2z, z)$.

Insättning i bivillkoret leder till en motägelse för det första alternativet, och för de andra sju leder till följande kandidaterna för max och minpunkterna:

$$\pm(\sqrt{21}, 0, 0),\ \ \pm(0, \sqrt{21}, 0), \pm(0, 0, \sqrt{21}),\ \ \pm(0, 2\sqrt{21/5}, \sqrt{21/5}),$$
$$\pm(4\sqrt{21/17}, 0, \sqrt{21/17}),\ \ \pm(2\sqrt{21/5}, \sqrt{21/5}, 0),\ \ \pm(4, 2, 1).$$

Det är lätt att se att det största värdet är $f(0,\,0,\,\sqrt{21}) = 84\sqrt{21}$ och det minsta är $f(0,\,0,\,-\sqrt{21}) = -84\sqrt{21}$.

(b): En normal till tangentplanet ges av

$$\mathbf{n} = \nabla f = (f_x,\,f_y,\,f_z) = (3x^2,\,6y^2,\,12z^2) \overset{(1,1,1)}{=} (3,\,6,\,12).$$

Tangentplanets ekvation lyder

$$\mathbf{n}\cdot(x-x_0,\,y-y_0,\,z-z_0) = 0 \Rightarrow (3,\,6,\,12)\cdot(x-1,\,y-1,\,z-1) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x+2y+4z = 7.$$

Anonym kod	TMA044 Flervariabelanalys E2 2014-10-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. Beräkna $\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy$ över randen, med moturs orientering, till högra halvan av enhetsskivan genom att

(a) parametrisera randen och räkna ut kurvintegralen. (3p)

(b) använda Greens sats. (2p)

Lösning (a): Vi delar upp randen i två delar, $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$, där $\mathcal{C}_1$ är högra halvan av enhetscirkeln, korsad moturs, och $\mathcal{C}_2$ är raksträckan från $(0,\,1)$ till $(0,\,-1)$. På $\mathcal{C}_2$ har vi $x = dx = 0$ så kurvintegralen längs $\mathcal{C}_2$ är noll. För $\mathcal{C}_1$ har vi parametriseringen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Således är

$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt) = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Den första integralen är noll ty integranden är en udda funktion av t. För den andra substituerar vi $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ och får såsmåningom att integralen blir $\pi/2$.

Svar: $\pi/2$.

(b): Kurvintegralen är $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ med $\mathbf{F} = (F_1,\,F_2) = (y^2,\,x)$. Enligt Greens sats har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (1-2y)\,dx\,dy,$$

där D är högra halvan av enhetsskivan. Området D är symmetrisk kring $y = 0$ så integralen av $-2y$ blir noll. Så vi har kvar endast $\iint_D 1\,dx\,dy = \text{Area}(D) = \pi/2$.

4. Betrakta sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ och halvkonen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Beräkna arean av den del av sfären som begränsas av halvkonen. (2p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy^2+\frac{1}{2}x^2,\, x^2y+\ln z,\, \frac{1}{3}z^3+e^{xy})$ ut ur det område som begränsas av sfären och halvkonen. (3p)

Lösning (a): På sfären har vi att areaelementet är $dS = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$. Området som begränsas av halvkonen ges av $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Således är dess area

$$\iint dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \cdots = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\,\pi.$$

(b): Vi använder Gauss divergenssats. Vi har

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = (y^2+x)+x^2+z^2 = (x^2+y^2+z^2)+x.$$

Området är symmetriskt kring z-axeln så integralen av x kommer att vara noll. Sedan byter vi till sfäriska koordinater och får att flödet ut blir

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho^2\,(\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta) = \cdots = \frac{32\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{5}\,\pi.$$

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})\,dA$ över området D i planet som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$. (3p)

Lösning: Kurvorna skär varandra i $(0, 0)$ och $(1, 1)$. Det är nödvändigt att först integrera m.a.p. y. Således får vi

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \int_{x^2}^{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \left[x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{x^2}^{x} =$$

$$= \int_0^1 (\sin 1 - \sin x)\,dx = [(\sin 1)x + \cos x]_0^1 = (\sin 1 + \cos 1) - (0 + 1) = \sin 1 + \cos 1 - 1.$$

(b) Bestäm konstanten A så att vektorfältet $\mathbf{F} = (2z^3,\, 2yz^3,\, 6xz^2 + Ay^2z^2)$ blir virvelfritt, och ta fram en potential till detta $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning: $\mathbf{F}$ är virvelfritt om och endast om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi har

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z^3 & 2yz^3 & 6xz^2 + Ay^2z^2 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\cdots = (2Ayz^3 - 6yz^3,\, 6z^2 - 6z^2,\, 0 - 0) = (2(A-3)yz^3,\, 0,\, 0)$$

så $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ om och endast om $A = 3$. Sedan hittar vi en potential genom att integrera:

$$\phi = \int F_1\,dx = 2xz^3 + C_1(y,\, z),$$

$$\phi = \int F_2\,dy = y^2z^3 + C_2(x,\, z),$$

$$\phi = \int F_3\,dz = 2xz^3 + y^2z^3 + C_3(x,\, y).$$

Dessa tre uttryck för ϕ blir konsekventa med varandra om vi väljer

$$\phi(x,\, y,\, z) = 2xz^3 + y^2z^3 + C.$$

(c) Ställ upp en trippelintegral som anger volymen av den tetraeder som begränsas av de tre koordinatplanen samt planet $x + y + z = 4$. Beräkna sedan trippelintegralen.
(Obs! Inga poäng ges för hänvisning till en färdig formel för volymen av en tetraeder.) (2p)

Lösning: Volymen ges av

$$\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} dz = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} (4 - x - y)\,dy =$$

$$= \int_0^4 dx \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} = \int_0^4 \frac{(4-x)^2}{2}\,dx = \int_0^4 \frac{x^2}{2}\,dx = \cdots = \frac{32}{3}.$$