MATEMATIK Dag : 031020 Tid : 14.15 - 18.45.
Chalmers Tekniska Högskola Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty Vakt : Peter Hegarty 0740-350646.

Tentamenskriving i Diskret Matematik (TMA 055)

65 poäng på denna tenta och 150 poäng totalt, inkl. poängen från inlämningsuppgifterna, ger godkännt. Dessa gränser kan minskas efteråt.

1 (25p) Ange resten vid division med 45 av

$$(2^{76} + 7^{98})^3$$

2 (25p) Lös fullständigt recurrence relationen

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, \\ u_n &= 4u_{n-1} + 2n + 1, \quad \forall\, n \geq 1. \end{aligned}$$

3 (25p) Ange alla heltalslösningar till systemet

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{13} \\ x &\equiv 4 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Ange speciellt den minsta positiva lösningen.

4 (25p) Ange (med bevis) alla heltalslösningar (x, y) till ekvationen

$$x^2 + 3x = y^3 - 2.$$

5 (12p+13p) Man hänvisas till grafen G i Fig. 1. Låt G_0 beteckna den oriktade och oviktade grafen man får då man tar bort pilarna och viktarna.

(i) Ange (med bevis) $\chi(G_0)$ och en explicit optimal färgning av G_0.

(ii) Tillämpa Dijkstras algoritm för att hitta en kortast väg från a till z. Skriv ner vilken kant du väljer i varje steg.

6 (25p) För varje $n \geq 0$ låt A_n vara antalet följder $a_1, a_2, ..., a_n$ av heltal som satisfierar

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ 0 \leq a_{i+1} &\leq a_i + 1, \quad \text{för } i = 0, ..., n-1. \end{aligned}$$

Till exempel, $A_3 = 5$ ty det finns 3 tillåtna följder av längd 3, nämligen

$$000 \quad 001 \quad 010 \quad 011 \quad 012$$

Din uppgift är att bevisa att $A_n = C_n$, det n:te Catalan talet, för varje $n \geq 0$.

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 27 oktober. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.