TMA 055 : Diskret Matematik (E3)

Week 1

Demonstration problems for Wedenesday, Sept 3

Solutions to the following problems will be presented by the övningsledare. Note that the idea behind the first problem, the so-called 'pigeonhole principle', was not discussed in class.

1 (6.4.2 in Biggs) Show that in a set containing 12 integers, there must be two whose difference is divisible by 11.

2 (10.2.1 in Biggs) In Dr. Cynthia Angst's calculus class, 32 of the students are boys. Each boy knows 5 of the girls and each girl knows 8 of the boys. How many girls are in the class ?

3. Suppose you have 10 colors available. How many different flags can you make which consist of 4 vertical strips, if the same color can be used more than once, but not on adjacent strips ?

4 (10.5.4 in Biggs) For positive integers $n \geq m$, denote

$$(n)_m := n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

'Explain' the equation

$$(n)_m \times (n-m)_{r-m} = (n)_r, \quad \text{whenever } n > r > m,$$

by interpreting what it saysa in terms of ordered selections.

5. Compute the number of possible positions of a game of tic-tac-toe after 5 moves, assuming X starts.

6 (see 11.2.3 in Biggs) If you multiply out $(x+y+z)^2$ and gather like terms, then you'll get 6 terms in all, namely

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Suppose you multiply out $(x+y+z)^{100}$ and gather like terms. How many terms will you end up with ?

Demonstration problems for Friday, Sept 5

7. På VM i fotboll deltar 32 länder. Till gruppspelet skulle lagen lottas i 8 grupper med 4 lag i varje. Antag att lottningen sker fritt. På hur många olika sätt kan lagen lottas (inbordesordningen i varje grupp är ovasentlig, men inte ordningen av grupperna själva) ?

(ANMÄRKNING : I det riktiga VM:et sker lottningen inte fritt. Det finns villkor som gör det väldigt svårt att räkna ut antalet möjligheter ... försök om du vill !)

8 (12.1.2 in Biggs) Explain why

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

9. In this exercise, $p(n,k)$ denotes the number of partitions of a positive integer n into k parts and $p(n) = \sum_k p(n,k)$ the total number of partitions of n.

(i) Evaluate $p(8)$.
(ii) Find a formula for $p(n,2)$.
(iii) Explain why $p(n, n-k) = p(k)$ when $k \leq n/2$.

10. Suppose the sequence $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ of integers satisfies the recurrence relation

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 5, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \text{ for all } n \geq 2.$$

Find a formula for u_n.

11. Let n be a positive integer. Define sequences $a(n), b(n)$ as follows :

$a(n)$ = number of ways to put (an unspecified number of) pawns, all of the same color, on a $2 \times n$ chessboard in such a way that no pawn can take any other

$b(n)$ = number of binary strings of length n containing no adjacent zeroes.

Establish the relationships between the numbers $a(n), b(n)$ and the Fibonacci numbers f_n.

12 (19.2.5(i) in Biggs) Without using the formula for the Fibonacci numbers f_n show that

$$f_{n+2} = 2 + \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Further practice problems

(this list will be constantly updated)

1. Give an (outrageous !) upper bound on the number of people born in Sweden between 1 January 1953 and 31 December 1955, considering that no two people get the same personnummer.

(Assume that the last 4 digits in a personnummer are arbitrary, except that the first can't be a zero).

2. Hur många tips rader har minst 10 rätt ?

3. How many 7-digit numbers incluse at least three 9:s ?

4. Suppose the final exam were to consist of 8 problems, of which six were worth 3 points and the others 4 points. Suppose that one can only get either full points or zero on each problem and that at least 12 points are needed to pass. In how many differnet ways could you pass the exam.

5. In how many ways can you arrange the letters $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ given the restriction that a must be to the left of b, and b must be to the left of c.

(Note : 'To the left of' does not mean immediately to the left of).

6. How many different 'words' can you make out of the letters in MISSISSIPPI, if all letters have to be used ?

7. How many poker hands contain

(i) nothing ?
(ii) a pair ?
(iii) two pairs ?
(iv) three of a kind ?
(v) a straight ?
(vi) a flush ?
(vii) a full house ?
(viii) four of a kind ?
(ix) a straight flush ?
(x) a royal flush ?

The following problems are taken fgrom last year's course :

8. Ett gäng av 8 killar går ut någon fredagkväll och träffar ett gäng av 6 tjejer. På hur många sätt kan de paras ihop så att bara ett par består av två olyckliga killar ?

9. Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, finns det från origon till punkten $(1, 1, ..., 1)$ i enhetskuben ?

10 (i) När matematikern Gauβ var 9 år gammal så satt han utttråkad i skolan en dag och bevisade följande nuförtiden välkända formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

I dagens skolor brukar man ofta bevisa denna formel med induktion på n - gör det ! Men Gauβ hade ett annat bevis - har du ?

(ii) Använd Gauβ metod för att hitta en liknande formel för summan av de första n udda positiva tal, dvs för summan

$$\sum_{l=1}^{n} 2k - 1.$$

Kan du bevisa detts formel i stället med en bild ?

11. Låt S vara en ändlig mängd. Bevisa *kombinatoriskt* att antalet delmängder till S som har ett jämnt antal element är lika med antalet delmängder som har ett udda antal element.

(OBS! På föreläsningen bevisade vi detta m.h.a binomialsatsen. Med ett 'kombinatoriskt' bevis menar jag att du skall beskriva en explicit 1-1 korrespondens mellan de 'jämna' och de 'udda' delmängderna.)

12 (a). Världens bästa klubbfotbollslag, Liverpool FC (!!!), hade i fjol (jag har inte hängt med alla förändringarna under sommaren !) en trupp bestående av 22 spelare : 3 målvakter, 6 försvarare, 9 mittfältare och 4 anfallare. Deras tränare föredrar spelsystemet 4-4-2, dvs målvakt + 4 försvarare + 4 mittfältare + 2 anfallare. Hur många olika laguppställningar har han då att välja ifrån, när alla spelarna är friska, om inbördesordningen i varje lagdel är (i) väsentlig (ii) oväsentlig.

(b) Världens sämsta klubblag, IFK Göteborg ...... nej, vi går vidare :-)

For a further selection of suitable problems, check out the 'uppvärmning' exercises on Homework No. 1 for the courses from 1998 to 2001 (links to these courses are on the home page).