Week 1 practice problems : Solutions

1. None of the years 1953, 1954 and 1955 is a leap year. Thus, if the personnummer is

$$yymmdd - efgh$$

then there are 3 possibilities for yy, 365 for $mmdd$, 9 for e and 10 for each of f, g, h. Hence, by MP, the total number of possible personnummer is

$$3 \cdot 365 \cdot 9 \cdot 10^3.$$

3. Since the first digit of a number can't be a zero, the total number of 7-digit numbers is $9 \cdot 10^6$. We subtract those which contain either 0,1 or 2 nines.

There are $8 \cdot 9^6$ numbers with no nines.

There are 9^6 numbers with exactly one nine, in the first position, and $8 \cdot 6 \cdot 9^5$ numbers with exactly one nine, but in some other position.

There are $6 \cdot 9^5$ numbers with exactly two nines, one of which is in the first position. There are $8 \cdot \binom{6}{2} \cdot 9^4$ numbers with exactly two nines, but neither of which is in the first position.

Summing up, the answer to the question is

$$9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6 - 9^6 - 8 \cdot 6 \cdot 9^5 - 6 \cdot 9^5 - 8 \cdot \binom{6}{2} \cdot 9^4.$$

5. There are 9! ways in all to arrange the letters. It's pretty obvious that each of the 3! permutations of a, b, c is equally likely as you read from left to right. Hence the answer is 9!/3!.

7 (i) $\binom{52}{5}$ minus summan av svaren till (ii)-(x).

(ii) Man har

- 13 val för parets värde
- $\binom{4}{2}$ val för parets färger
- $\binom{12}{3}$ val för värden av de resterande tre korten

- 4 val för färgen av var och ett av dessa tre kort.

Enligt multiplikationsprincipen är svaret

$$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3.$$

(iii) Man har

- $\binom{13}{2}$ val för värdena av de två paren
- $\binom{4}{2}$ val för färgerna i varenda par
- 44 val för det femte kortet.

Enligt multiplikationsprincipen är svaret

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44.$$

(iv) Man har

- 13 val för trissets värde
- $\binom{4}{3}$ val för trissets färger
- $\binom{12}{2}$ val för de återstående två kortens värden
- 4 val för färgen av var och ett av dessa kort.

Enligt multiplikationsprincipen är svaret

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2.$$

(v) Jag räknar det totala antalet stegar och subtraherar talen från (ix) och (x). För en godtycklig stege har man

- 10 val för värdet av stegens lägsta kort
- 4 val för färgen av varje kort.

Enligt multiplikationsprincipen, det totala entalet stegar är $10 \cdot 4^5$. Och svaret är $10 \cdot 4^5 - 40$.

(vi) Jag räknar det totala antalet färger och subtraherar talen från (ix) och (x). För en godtycklig färg har man

- 4 val för färgens färg
- $\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ val för färgens värden.

Enligt multiplikationsprincipen är det totala antalet färger $4 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$. Och svaret är $4 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} - 40$.

(vii) Man har

- 13 val för trissets värde
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ val för trissets färger
- 12 val för parets värde
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ val för parets färger.

Svaret, enligt multiplikationsprincipen, är

$$13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(viii) Man har 13 val för fyrtalets värde och 48 val för det sista kortet. Svar : $13 \cdot 48$.

(ix) Man har 4 val för färgen och 9 val för det lägsta kortets värde. Svar : $4 \cdot 9 = 36$.

(x) Man har 4 val för färgen. Svar : 4.

9. You want to go from $(0, 0, ..., 0)$ to $(1, 1, ..., 1)$. Each step changes one of the coordinates from a zero to a one, so the only issue is in what order you flip the coordinates. Hence, there are $n!$ paths in the n-dimensional cube.

11. Let S have n elements, say $1, 2, ..., n$. Let $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{O}$) denote the collection of subsets of S containing an even (resp. odd) number of elements.

We can easily describe an explicit bijection

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{O}.$$

Let A be a set in $\mathcal{E}$. Then we define

$$f(A) := \begin{cases} A \cup \{n\}, & \text{if } n \notin A, \\ A \backslash \{n\}, & \text{if } n \in A. \end{cases}$$

It's easy to see that $f(A) \in \mathcal{O}$ and that f is a bijection from $\mathcal{E}$ to $\mathcal{O}$, v.s.v.