Att lämna in fredag den 17 september

REGLER : Du får full poäng för korrekta lösningar till 7 valfria uppgifter. Du kan få ett bonus av upp till 30 procent genom att lösa 9 valfria uppgifter.

Min subjektiva bedömning är att bonus problemen är 'svårare' än de andra, så att det är bäst att koncentrera sig först på de andra. Det utesluter inte förstås att det visar sig vara annorlunda för någon. Men bonus problemen är tänkt som 'utmaningar' för dem som har klarat av resten och vill göra mer.

1. Hur många tips rader har minst 10 rätt ?

(Obs! Jag utgår ifrån att en tipskupong består av 13 rader, och att man fyllar i 1,X eller 2 i varje rad - dvs, ingen gardering är tillåtet).

2. Sverige ska spela 10 VM-kval matcher. Låt oss vara optimistiska och anta att de gör 24 mål totalt. Antag också att de använder totalt 21 olika spelare i de 10 matcherna. Hur många möjligheter finns det nu för den svenska skytteligan ?

(T.ex. en möjlighet är : Zlatan 18 mål, Larsson 3 mål, Ljungberg 2 mål, Allbäck 1 mål, alla andra 0 mål).

3. Förklara varför det finns just $2^n - 1$ termer på HL i formeln för $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ som ges av såll principen.

4. Låt X vara en ändlig mängd. Utan att hänvisa till Binomialsatsen, förklara värför precis hälften av delmängderna till X innehar ett udda antal element.

5. Förenkla så mycket som möjligt (med bevis !)

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}.$$

6 (i) Let $n \geq 3$. Find a recurrence relation for the number of ways to park motorcycles and compact cars in a row of n spaces if each cycle requires two spaces and each car needs three.

(Obs! All cycles are identical in appearance, as are all cars, and we want to use up all the n spaces).

(ii) How would you reformulate the question so that the number q_n of ways to fill n spaces satisfied

$$q_1 = 2, \quad q_2 = 7, \quad q_n = 2q_{n-1} + 3q_{n-2} \ \ \forall\, n > 2.$$

Solve this latter recurrence relation.

7 (i) Uppgift 11.2.4 i Biggs.
(ii) M.h.a såll principen, beräkna antalet lösningar till ekvationen

$$a + b + c = 21,$$

där a, b, c är icke-negativa heltal som uppfyller $a \leq 10$, $b \leq 7$, $c \leq 12$.

(Tips : Sålla ut de 'dåliga' lösningar som en union av tre välvalda mängder).

Bonus problem

8. Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *generiskt placerade*, dvs att inga tre kordor skärs i samma punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln, dvs ge en enkel formel och visa den kombinatoriskt.

(Tips : Kolla de första fallen och formulera en gissning. Kolla ett par fall till och försök skriva resultatet som en elegant summa av binomialtal).

9. Tre tal a, b, c sägs utgöra en *aritmetisk följd* (AF) om $a < b < c$ och $c - b = b - a$.

(i) Låt A_n vara antalet AF:er bland talen $1, 2, ..., n$. Ange en recurrence relation för A_n.

(ii) Ange en explicit formel för A_n (detta kan du göra m.h.a del **(i)**, men också mer direkt.

(Tips : Dela upp i 2 fall, beroende på om n är jämn eller udda).

10. Givet en följd av $n^2 + 1$ olika reela tal, bevisa att det finns antingen en växande eller avtagande delföljd bestående av $n + 1$ tal.

11. En mängd av tal sägs vara *sum-free* om den innehåller inga lösningar till ekvationen $x + y = z$.

(i) Ange en formel för den maximala storleken av en sum-free delmängd till $\{1, ..., n\}$.

(ii) Ange, för varje $n > 0$, två olika exempel av sum-free delmängder till $\{1, ..., n\}$ av maximal storlek.