Att lämna in torsdag den 30 september

REGLER : Du får full poäng för korrekta lösningar till 6 valfria uppgifter. Du kan få ett bonus av upp till 30 procent genom att lösa 8 valfria uppgifter.

Min subjektiva bedömning är att bonus problemen är 'svårare' än de andra, så att det är bäst att koncentrera sig först på de andra. Det utesluter inte förstås att det visar sig vara annorlunda för någon. Men bonus problemen är tänkt som 'utmaningar' för dem som har klarat av resten och vill göra mer.

1. Solve the recurrence relation

$$\begin{aligned} u_0 = 1, \quad u_1 &= 1, \\ 3u_{n+2} - 7u_{n+1} - 6u_n &= 3^n \quad \forall\, n \geq 0. \end{aligned}$$

2 [12.1.3 (5.1.3) in Biggs] Prove that

$$S(n,k) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} S(r, k-1).$$

3. Prove that

$$p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k).$$

Use the recurrence relation (again and again !) to compute $p(27, 5)$.

4. Find the general solution to the Diophantine equation

$$19x + 33y = 2000.$$

Hence write down all possible ways to burn exactly two grand on beer and chips, if a bottle of beer costs 33 kr and a bag of chips costs 19 kr.

5. Prove that if n is an odd integer, then $n^5 - n$ is divisible by 240.
(Hint : Factorise and use FTA).

6 [1.9.16 in old Biggs] Prove that, for any positive integer n, one can find a sequence of n consecutive numbers, none of which is prime.
(Hint : Consider the numbers $n! + k$ for $k = 2, ..., n+1$).

7 [8.7.14 (1.9.19) in Biggs] Show that if $\text{GCD}(a, b) = 1$ then $\text{GCD}(a + b, a - b)$ is either 1 or 2.

Bonus problem

8. Sätt $A_0 := 1$. För varje $n \geq 1$ låt A_n vara antalet följder $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ av längd $n - 1$ av heltal som satisfierar

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots,$$
$$a_i \leq 2i, \quad \text{för } i = 1, ..., n-1.$$

Till exempel, $A_3 = 5$ ty det finns 5 tillåtna följder av längd 2, nämligen

12 13 14 23 24

Din uppgift är att bevisa att $A_n = C_n$, det n:te Catalan talet, för varje $n \geq 0$.

(Tips : Betrakta den första (eller sista) positionen där något speciellt inträffar).

9 [8.7.12 (1.9.17) in Biggs] Prove that there are no integers x, y, z, t for which

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 3t^2 = 0.$$

10. Let S denote the set of all real numbers of the form $x + y\sqrt{2}$, where x and y are integers. Prove that S is closed under multiplication, i.e.: that the product of two numbers in S is also in S. Hence, or otherwise, prove that there are infinitely many solutions to the Diophantine equation

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$