Att lämna in torsdag den 15 september

REGLER : Du får full poäng för korrekta lösningar till 6 valfria uppgifter. Du kan få ett bonus av upp till 20 procent genom att lösa alla 7 uppgifterna.

1. Betrakta ett lotteri där man väljer 6 av talen mellan 1 och 39.

(i) Om det krävs minst 3 rätt för att vinna någonting, på hur många olika sätt kan man bli en vinnare ?

(ii) Vad är sannolikheten att alla 6 vinnande talen är udda ?

2. Låt oss vara optimistiska och föreställa oss att Sverige gör 26 mål totalt i deras 10 VM-kval matcher. Säg nu att man är intresserad av antalet mål som gjordes i varje match. Hur många möjligheter finns det

(i) om vi vet inget mer

(ii) om vi vet att (a) de gjorde inga mål i två matcher, men inte vilka två (b) de gjorde 1 mål i två andra matcher, men inte vilka två (c) de gjorde minst två mål i var och en av de återstående 6 matcherna.

3 (1.4.28(a) i Grimaldi) Låt $n \geq 4$. Låt A_n vara antalet n-bitars binära ord där mönstret '01' förekommer exakt 2 gånger. Så t.ex. för $n = 6$, 010010 och 100101 är sådana ord, men inte 101111 eller 010101.

(i) För att få lite känsla för problemet, ange A_4, A_5 och A_6, och skriv ner alla möjliga ord i dessa fall.

(ii) ange (med bevis) en formel för A_n.

4. Låt n vara ett positivt heltal. Förklara varför

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \right].$$

5. Låt n vara ett positivt heltal. Låt A_n vara den största möjliga storleken av en delmängd till $\{1, ..., n\}$ däri inget tal är lika med två gånger något annat. Bevisa att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{n} = \frac{2}{3}$$

i följande två steg :

(i) beskriv explicita delmängder X_n till $\{1, ..., n\}$ som uppfyller det givna villkoret så att $|X_n|/n \to 2/3$,

(ii) M.h.a. lådprincipen eller på något annat vis, bevisa att, för ett godtyckligt n, om X är en delmängd till $\{1, ..., n\}$ som uppfyller villkoret så måste $|X| \leq 2n/3$.

(Tips : M.h.a. exemplet du konstruerar i del **(i)**, dela upp talen $1, ..., n$ i olika grupper och visa att X får innehålla högst två tredjedelar av talen i varje grupp).

6 (10.2.12 i Grimaldi) Antag att poker chips kommer i fyra färger - röd, blå, grön och vit. Ange och lös en recurrence relation för antalet sätt att göra en hög med n chips utan närliggande blåa chips.

7. M.h.a såll principen, beräkna antalet permutationer av talen 1,2,....,100 där inga två av talen $1, 2, 3$ ligger bredvid varandra.