Föreläsning 24/08

Den intuitiva uppfattningen av de reella talen som punkterna på en rät linje (m.a.p. en designerad origo) kan formaliseras genom det s.k. *Fullständighetsaxiomet (Completeness Axiom)*. Notera att detta är ett *axiom*, dvs det ingår i själva begreppet 'reellt tal' och är inte något som kan härledes från andra egenskaper hos reella tal. För att kunna framställa axiomet så krävs lite terminologi :

DEFINITION 1 : En mängd X av reella tal sägs vara *begränsad* om det finns ett positivt reellt tal C s.a. $|x| < C$ för alla $x \in X$.

DEFINITION 2 : Låt X vara en begränsad mängd av reella tal och r ett reellt tal. Om $r > x$ för alla $x \in X$ då sägs r vara en *övre gräns* till X.

DEFINITION 3 : Låt X vara en begränsad mängd av reella tal och r en övre gräns till X. Då sägs r vara den *minsta övre gränsen* till X om det inte finns något annat tal s, som också är en övre gräns till X och s.a. $s < r$.

Fullständighetsaxiomet *Varje icke-tom begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns.*

EXEMPEL 1 : $X = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...\}$. Talet 1 är den minsta övre gränsen till X.

EXEMPEL 2 : Tag vilket irrationellt tal som helst och betrakta dess decimalutveckling. Skär man av denna längre och längre ut så får man en mängd X av rationella tal. Den minsta övre gränsen till mängden X är själva irrationella talet.

Exempel 2 visar följande :

(i) mängden $\mathbf{Q}$ av rationella tal är inte självt 'fullständigt', man måste lägga till fler tal.
(ii) de reella talen kan identifieras med alla möjliga decimalutvecklingar. Detta är ni nog (under)medvetna om. Men det som poängteras här är att, för att få en mängd av tal som uppfyller Fullständighetsaxiomet, så måste vi ta med alla möjliga decimaltal.

(iii) de allra flesta[1] reella talen är irrationella. För vi vet att decimalutvecklingen till ett rationellt tal antingen slutar eller upprepar sig (bevis ??) medan ett 'godtyckligt' decimaltal har med stor sannolikhet varken den ena eller den andra egenskapen.

Trots (iii) så är det inte lätt att visa upp ett explicit exempel på ett irrationellt tal som har en 'snygg' geometrisk realisering som en längd. Det snyggaste exemplet är nog talet π, det universella förhållendet mellan omkretsen och diametern av en cirkel. Archimedes är känd bl.a. för att ha försökt under många år att 'beräkna' π, dvs att hitta ett bråktal lika med π. Men han borde inte skämmas för att inte ha lyckats för nu vet vi att π faktiskt är irrationellt och det dröjde fram till 1800-talet innan någon lyckades bevisa detta. Även de enklaste bevisen som finns idag kräver goda kunskaper om envariabelanalys.

Det bästa exemplet av ett 'snyggt' tal vars irrationalitet kan lätt beviusas är nog $\sqrt{2}$. Att det faktiskt finns ett reellt tal som, multiplicerat med sig självt, blir 2, följer från Pythagoras Sats. För längden av hypoteneusen i en rätvinklig triangel vars ben har längd ett har denna egenskap. Notera att den följer också från Fullständighetsaxiomet :

Övning (frivillig) : Låt X vara mängden av de reella tal som i kvadrat blir mindre än eller lika med 2. Låt r vara den minsta övre gränsen till X. Förklara varför $r^2 = 2$.

Följande är standardbeviset av irrationaliteten av $\sqrt{2}$, som redan finns i Euklides :

Sats $\sqrt{2}$ *är irrationellt.*

Bevis : Antag motsatsen, dvs antag att det finns ett bråktal som i kvadrat är lika med 2. Antag dessutom att detta bråktal har skrivits i lägsta termer. Detta innebär att vi har heltal p och q s.a.

(i) det finns inget heltal större än 1 som delar både p och q jämnt,

[1] Man kan säga väldigt precis vad som menas med detta, nämligen de rationella talen är *uppräkneliga* men de reella talen är *ouppräkneliga*. Den intresserade läsaren uppmanas att själv ta reda på vad dessa ord betyder.

(ii)

$$\left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2} = 2. \tag{1}$$

Från (1) så härleder vi att

$$p^2 = 2q^2. \tag{2}$$

Den HL av (2) är ett jämnt tal (oberoende av vad q är). Men kvadraten ur ett udda tal är också udda (eller hur ?) så talet p måste också vara jämnt. Sätt $p = 2r$, där r är något heltal. Då är $p^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Substituera detta in i (2) och kancellera en 2:a från båda leden så får vi att

$$2r^2 = q^2. \tag{3}$$

Men den VL av (3) är nu ett jämnt tal så samma typ av resonemang som ovan leder till slutsatsen att talet q är jämnt.

Men nu har vi framför oss slutsatsen att både p och q är jämna, och detta strider mot antagandet (i) ovan. Beviset är därmed klart !

ANMÄRKNING : Argumentationen ovan är ett klassiskt exempel på ett s.k. *motsägelsebevis*. Dvs man bevisar att något påstående är sant genom att antaga motsatsen och härleda från detta antagande någonting som är uppenbarligen falskt !