Föreläsning 30/08

En funktion är en avbildning mellan två mängder. Men vad är en mängd ? På en nivå är detta ingen komplicerad fråga :

NAIV DEFINITION : En *mängd* är en samling föremål, utan repititioner. Föremålen i en mängd kallas för dess *element*.

För de allra flesta människorna, så räcker denna naiva uppfattning av mängdbegreppet för att klara sig i livet. Dock är det rätt kul att se dess logiska bristningar. Också på en filosofisk nivå är det en viktig illustration, liksom t.ex. relativitetsteorin, av hur 'sund förnuft' ofta leder till en bristfällig världsbild.

Problemen med den naiva definitionen ovan illustreras via en logisk paradox som heter *Russells paradox*, nämnt för den engelska filosofen Bertrand Russell som formulerade paradoxen i början på 1900-talet.

Först kan man konstatera att det finns ingenting i den naiva definitionen som utesluter att elementen i en mängd är också mängder. T.ex. $\{\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{H}\}$ är en mängd bestående av 6 element, nämligen mängderna av naturliga tal, heltal, rationella tal, reella tal, komplexa tal resp. kvaternioner. Betrakta nu följande definition :

DEFINITION : En mängd sägs vara *normal* om den inte innehåller sig själv som ett element.

Kanske börjar detta låta väldigt esoteriskt, men å andra sidan de flesta mängderna man kan föreställa sig är troligen normala, så definitionen ser inte speciellt farlig ut. Men vad sägs om följande :

Fråga *Betrakta mängden vars element är alla normala mängder. Är denna mängd normal eller inte ?*

Detta är Russells paradox. Paradoxen ligger i att frågan har inget rätt eller fel svar. Kalla mängden ifråga för S. Om S var normal så skulle den inte innehålla sig själv som ett element, per definition av 'normal'. Men S består av alla normala mängder, så om den inte innehåller sig själv som ett element, detta medför att S inte är en normal mängd - en motsägelse !

På samma sätt, om svaret på frågan var nej, skulle det betyda att S inte är normal och därmed innehåller sig själv som ett element. Men elementen till S är alla normala mängderna, och därmed är S normal trots allt - en ny motsägelse !

Det är nog väldigt frestande att bara sopa allt det här under mattan och rusa tillbaka till 'verkligheten'. Men ett antal modiga/knasiga människor har ägnat en stor del av sina liv åt att försöka förstå vad som egentligen är på gång här. De stora resultaten av detta arbete är följande :

1. *Zermelo-Fraenkel axiomen* för mängdlära, som ersätter informella meningar med ett stenhårt system av formella axiom för mängder, allt i syfte på att undvika riktiga pärlor som Russells paradox.
2. *Gödel's Incompleteness Theorem :* En riktig kalldusch från den österrikiske logikern Kurt Gödel som i princip säger att inom varje axiomatiskt system, hur försiktigt som helst den må vara formulerat, så går det inte att undvika logiska paradoxer. Dvs det blir alltid frågeställningar av typ ja/nej som inte har något rätt eller fel svar.
3. *Continuum Hypothesis :* Under många år betraktades Gödels insatser som imponerande men samtidigt ganska harmlösa, eftersom det verkade inte finnas några 'naturliga' frågeställningar för vilka hans sats gällde (Gödels egna exempel var extremt abstrakta). Men 1963 visade den amerikanske matematikern Paul Cohen att det fanns en relativt enkel fråga, just inom mängdlära, som inte kunde besvaras inom ramen för det hyllade Zermelo-Fraenkel axiomsystemet. Frågan går under namnet 'Continuum Hypothesis', och är ändå för abstrakt för att beskriva här, men tillräckligt enkel så att varje nutida matematikstuderande skulle kunna förstå den.

EPILOG

Det finns massor med resurser på nätet om du vill läsa mer om dessa ämnen. Speciellt finns det många 'populära' versioner av Russells paradox : kanske den bästkända finns här :

http://en.wikipedia.org/wiki/Barber_paradox

På föreläsningen gav jag en formulering i termer av den 'perfekta kristen/socialisten', men detta är kanske för politiskt inkorrekt för att skriva ner !!