Formelsamling för TMV120 : HT-06

Följande är en lista över saker man 'ska kunna' till tentan. Det ideala är förstås att man ska förstå allting på listan så att man kan svara på teorifrågor, och att man kan tillämpa kunskapen till att lösa räkneuppgifter, som utgör majoriteten av tentan.

Fakta grupperas i fem kategorier :

D : definition. Du ska kunna definitionen av det nämnda begreppet.

F : formel. Oftast en algebraisk formel som man ska kunna utantill eller kunna härleda.

M : en rutinmetod för att lösa en speciell typ av problem, som man ska kunna tillämpa.

S : en sats vars formulering man ska kunna utantill och kunna återge.

SS : en sats som man dessutom ska kunna bevisa.

RP 1.1

Algebraiska räknelagar : kommutativa, associativa och distributiva lagarna (D).
Standardfaktoriseringarna på s.2 (F).
Faktoriseringen av $a^n \pm b^n$ (SS).
Binomialsatsen / Pascals triangel (S).

RP 1.2

Bråkräkningslagarna (S).
Polynomdivision (M).

RP 1.4

Absolutbeloppfunktionen (D).

RP 1.7

Rötterna till en kvadratisk ekvation (F)

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

RP 1.8

Faktorsatsen (SS).

RP 1.11

Regler för olikheter s.19 (F).

RP 1.12

Potenslagarna s.21 (F).
Utvidgning av potensfunktioner till rationella potenser (D/SS).

RAA : P4

Definitionsmängd och väredmängd till en funktion (D).
Periodisk funktion (D).
Jämn och udda funktion (D).
Speglingssymmetrier och grafer (M : se boxen på s.29).

RAA : P5

Summa, produkt, kvot, sammansättning av funktioner (D).
$f(x) = \lfloor x \rfloor$, $f(x) = \lceil x \rceil$ (D).
$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ (D).
Styckvis definierad funktion (D).

RAA : P7

En radian (D).
π radianer = 180 grader (SS).
Cosinus och sinus av en vinkel (D).
Definitionerna till de andra trigonometriska funktionerna i termer av sinus och cosinus (D).
Graferna till de trigonometriska funktionerna (F).
Följande lista av identiteter hos de trigonometriska funktionerna (SS) :

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) &= \cos\theta, \\
\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) &= \cos\theta, \\
\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \quad \sin(\pi - \theta) &= \sin\theta, \\
\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta, \quad \sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta, \\
\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta, \quad \sin(\pi/2 + \theta) &= \cos\theta, \\
\cos(\pi/2 - \theta) &= \sin\theta, \\
\cos 0 = \sin\pi/2 &= 1, \\
\cos\pi/2 = \sin 0 &= 0, \\
\cos\pi = \sin\pi/2 &= -1, \\
\cos\pi/3 = \sin\pi/6 &= 1/2, \\
\cos\pi/6 = \sin\pi/3 &= \sqrt{3}/2, \\
\cos\pi/4 = \sin\pi/4 &= 1/\sqrt{2}, \\
\cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1, \\
\text{Sinuslagen : } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin C}{c}.
\end{aligned}
$$

Följande identiteter ska du kunna men behöver ej kunna bevisa (F/S) :

$$
\begin{aligned}
\cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B, \\
\sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B, \\
\tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B},
\end{aligned}
$$

och de speciella fallen (F)

$$
\begin{aligned}
\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 &= 1 - 2\sin^2 A, \\
\sin 2A &= 2\sin A\cos A, \\
\tan 2A &= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.
\end{aligned}
$$

Dessutom (F/S)

$$\begin{aligned}\text{Cosinuslagen}: \; a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C.\end{aligned}$$

RAA : Appendix I

Reella och imaginära delarna till ett komplex tal (D).
Addition och multiplikation av komplexa tal (F).
Absolutbeloppet av ett komplex tal (D/F).
Konjugaten till ett komplex tal (D).
Division av komplexa tal (F).
Arganddiagrammet (D).
Argumentet av ett komplex tal (D).
Polär representation av ett komplex tal (D).
Följande formler ska kunna bevisas (SS) :

$$\begin{aligned}|z|^2 &= z\overline{z},\\ |zw| &= |z||w|,\\ |z+w| &\leq |z| + |w|,\\ \arg(zw) &= \arg z + \arg w.\end{aligned}$$

Man ska kunna formulera och tillämpa (S/F) :

$$\text{De Moivres sats}: \; (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

LEK

Gausselimination (M).
De tre typer av lösningsmängd (S).
Underbestämda och överbestämda system (D).

RAA : 1.2

Gränsvärde (D)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Ensidiga gränsvärde (D)

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = L.$$

Ett existenskriterium (S)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L.$$

Regler för gränsvärdeberäkningar : Theorem 2 (S).

RAA : 1.3

Oändliga g.v. (lodrätta asymptoter) (D)

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = +\infty \quad \text{(och andra teckenkombinationer).}$$

G.v. i oändlighet (D), antingen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{(och andra teckenkombinationer)}$$

eller (vågrätta asymptoter)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L.$$

G.v. i oändlighet för rationella funktioner : boxen på s.72 (S).

RAA : 1.4

Kontinuitet i en punkt (D).
Vänster/höger kontinuitet i en punkt (D).
Kontinuitet på en öppen/sluten intervall (D).
Theorems 6,7 s.79 (S).
Removable discontinuity (D).
Mellanliggandevärdesatsen (S).
Extremvärdesatsen (S).

RAA : 2.1

Tangentlinjen till en kurva i en punkt (D).
Normallinjen till en kurva i en punkt (D).

RAA : 2.2

Derivatan till en funktion i en punkt (D/F).
Deriverbarhet på en öppen/sluten intervall (D).
Derivering från själva definitionen (SS) :

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{0\}). \tag{1}$$

En speciell derivata (SS) :

$$\frac{d}{dx}|x| = sgn(x).$$

Leibniznotationen (D).

RAA : 2.3

Reglerna för derivering av summor, produkter, reciprocals och kvot (SS).
Utvidgning av (1) till alla rationella n (via produktregeln : kan i stället använda implicit derivering) (SS).
Deriverbarhet $\Rightarrow$ Kontinuitet (SS).

RAA : 2.4

Kedjeregeln (F/S).

RAA : 2.5

Ett speciellt g.v. (SS)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Härledning från (2) och definitionen av derivata att (SS)

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x. \tag{3}$$

Härledning från (2), (3) och deriveringsreglerna av derivatorna till de andra trigonometriska funktionerna (SS).

RAA : 2.6

Växande/avtagande funktion i en punkt / på en intervall (D).
Rolles sats (SS).
Medelevärdesatsen (SS : räcker med den bildmässiga reduktionen till Rolles sats).

RAA : 2.7

Lineariseringsformeln (F)

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a).$$

RAA : 3.1

Ett-till-ett (injektiv) funktion (D).
Inversfunktion (D).
Grafen till en inversfunktion (M).
$\mathrm{DM}(f) = \mathrm{VM}(f^{-1})$, $\mathrm{VM}(f) = \mathrm{DM}(f^{-1})$ (D).
Derivering av inversfunktioner via kedjeregeln (SS) :

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}. \tag{4}$$

RAA : 3.2

Allmänna potenslagarna s.168 (S).
Logaritmen (D) :

$$\log_a x = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^y = x.$$

Logaritmlagarna s.169 (SS : ska kunna härledas från potenslagarna).
Härledning av logaritmens derivata från (4) ovan och (5) nedan :

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x(\ln a)}, \quad \text{speciellt} \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Definitionen av Eulertalet (D)

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n,$$

och följdaktligen (egentligen tillhör avsnitt 3.4) (S)

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n.$$

Derivering av allmänna potensfunktioner (S) :

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a, \quad \text{speciellt} \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x. \tag{5}$$

Logaritmisk derivata f'/f (D/F).
Logaritmisk derivering (M).

RAA : 3.4

Theorems 4,5 (S).

RAA : 3.5

Definitionsmängderna, värdemängderna och graferna till de invers-trignometriska funktionerna (S).
Följande derivator m.h.a. (4) och formlerna från avsnitt 2.5 (SS) :

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}.$$

RAA : 3.6

Definitionerna av de hyperboliska funktionerna Cosh och Sinh (D) :

$$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Graferna till Sinh, Cosh och Tanh (F).
Identiteterna hos de hyperboliska funktionerna svarande mot identiteterna hos de trigonometriska funktionerna i avsnitt P7 ovan (SS).
Invers-hyperboliska funktioner : grafer (F) och formler (F/S)

$$\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$
$$\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$
$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1<x<1.$$

RAA : 4.2

Absolut max/min (D).
Lokal max/min (D).
Kritisk punkt (D).
Singulär punkt (D).
Theorem 2, s.218 (S).
Theorem 3, s.219 (S).

RAA : 4.3

Konkav upp/ner (D).
Inflektionspunkt (D).
Theorems 5,6 (S).

RAA : 4.4

Lodrätt/vågrätt/lutande asymptot (D).
Asymptotisk uppförande hos rationella funktioner (S : boxen på s.231, som sammanfattar materialet om rationella funktioner från Kapitel 1).

RAA : 10.1

Cartesisk koordinatsystem (D).
Högerhänt system (D).
Avståndsformeln via Pythagoras (SS).
Ekvationerna till en sfär och en cylinder (F).

RAA : 10.2

Addition av vektorer (D/F).
Skalärmultiplikation (D/F).
Standardbas m.a.p. ett Cartesiskt koordinatsystem (D).
Skalär/dot/inre produkt (D1/F1, D2/F2) (SS : bevisa att D1/F1 = D2/F2).
Skalär/vektor projektion (D/F).

RAA : 10.3

Vektor/kryss produkt (D1/F1, D2/F2) (S : att D1/F1 = D2/F2).
Egenskaper hos vektorprodukten (SS : boxen på s.554).
Skalärtrippelprodukt (D), tolkning som volymen av ett parallelopiped (S) och beräkning som en determinant (F).