Dugga 1 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Kvadraten ur VL är $a^2 + b^2$ medan att kvadraten ur HL är $a^2 + b^2 + 2|a||b|$.

(b) Detta är SANT och följer från definitionen av potensfunktioner och kravet att sådana funktioner ska vara kontinuerliga (s.a. man ansätter t.ex. $7^{1/2} := +\sqrt{7}$ i stället för $-\sqrt{7}$).

(c) Detta är SANT enligt faktorsatsen, som säger att $x = 2$ är en rot till $p(x) = 0$ om och endast om $x - 2$ går jämnt in i $p(x)$.

(d) Detta är SANT. Enligt potenslagarna är båda leden lika med $b^{1/mn}$.

2 (a) Jag ska ge tre alternativa lösningar, från den jag betraktar som den enklaste till den krångligaste.

1:A LÖSNING :

Vi söker alla talen för vilka summan av avstånden mellan talet och -1 och $+5$ är sammanlagt 13. Eftersom avståndet mellan -1 och $+5$ är från början lika med 6, så gäller för alla talen i $[-1, 5]$ att summan av dess avstånd från dessa två ändpunkter är precis 6. Det fattas alltså $13 - 6 = 7$. För att ta igen detta så kan vi antingen gå $7/2$ enheter till höger om talet 5 eller $7/2$ enheter till vänster om talet -1. Vi hamnar respektivt vid $17/2$ eller $-9/2$.

Alltså har ekvationen två lösningar : $x = 17/2$ och $x = -9/2$.

2:A LÖSNING :

Gör en falluppdelning m.a.p. tecknen på $x + 1$ och $x - 5$. Det blir tre fall :

Fall 1 : $x < -1$.

Då är både $x + 1$ och $x - 5$ negativa så ekvationen blir

$$-(x + 1) - (x - 5) = 13,$$

som har den unika lösningen $x = -9/2$.

Fall 2 : $-1 \leq x \leq 5$.

Här är $x+1$ positiv och $x-5$ negativ, så ekvationen blir

$$(x+1)-(x-5)=13,$$

som reducerar till $6=13$ och därmed saknar lösningar.

Fall 3 : $x \geq 5$.

Här är både $x+1$ och $x-5$ positiva så ekvationen blir

$$(x+1)+(x-5)=13,$$

som har den unika lösningen $x=17/2$.

Så sammanlagt har vi två lösningar, $x=-9/2$ och $x=17/2$.

3:E LÖSNING (EJ REKOMMENDERAD !!) :

Kvadrera båda leden så förvandlas ekvationen till

$$(x+1)^2+(x-5)^2+2|x+1||x+5|=169.$$

Utveckla kvadraterna, tag dem till HL och förenkla så får vi att

$$2|x+1||x-5|=-2x^2+8x+143.$$

Kvadrera båda leden igen så erhålls

$$4(x+1)^2(x-5)^2=(-2x^2+8x+143)^2.$$

Om man nu utvecklar båda leden kan man kolla att både x^4- och x^3-termerna tar ut varandra och att man har kvar den kvadratiska ekvationen

$$532x^2-2128x-20349=0.$$

Man kan nu kontrollera att $7 \cdot 19 = 133$ går jämnt in i alla tre koefficienter så att ekvationen kan förkortas till

$$4x^2-16x-153=0.$$

Därmed blir det två lösningar

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 153}}{8}.$$

Eftersom $16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 153 = 2704 = 52^2$ så kan lösningarna förkortas till $x = (16 \pm 52)/8 = (4 \pm 13)/2$, dvs $x = 17/2$ och $x = -9/2$.

(b) Notera att $256 = 2^8$ och $16 = 2^4$. Därmed är

$$\sqrt[6]{256} = (256)^{1/6} = (2^8)^{1/6} = 2^{8/6} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}.$$

Notera vidare att

$$2^{4/3} = 2^{1+1/3} = 2^1 \cdot 2^{1/3} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Därmed förenklas bråket till

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{(2+1) \cdot \sqrt[3]{2}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Svar : 3/2.

3. Att $x = -2$ är en rot till ekvationen innebär, enligt faktorsatsen, att $x + 2$ är en faktor till $x^3 + 8x^2 + 15x + 6$. Utför man polynomdivisionen så erhålls kvotet $x^2 + 6x + 3$, som innebär att ekvationen kan skrivas som

$$(x+2)(x^2 + 6x + 3) = 0.$$

Därmed ges de övriga rötterna av lösningarna till den kvadratiska ekvationen $x^2 + 6x + 3 = 0$. Enligt den välkända formeln ges dessa av

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}.$$

Lösningar till den gula versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.
2 (a) $x = -13/2$ och $x = 9/2$.
(b) 4.

3. $x = -2 \pm \sqrt{2}$.