Dugga 2 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den ORANGEA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den VITA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Låt $g(x) := f(\sin x)$. Det gäller att visa att $g(-x) = g(x)$. Kom ihåg att sinus-funktionen är udda, dvs $\sin(-x) = -\sin(x)$. Alltså gäller att $g(-x) = f[\sin(-x)] = f(-\sin x)$. Men f är jämn så $f(-\sin x) = f(\sin x) = g(x)$. Därför är $g(-x) = g(x)$, v.s.v.

(b) Detta är FALSKT. Snarare gäller i allmänhet att

$$\mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Im}(w).$$

(c) Detta är FALSKT. För ett motexempel behöver man en graf till en funktion, som täcker hela y-axeln men inte hela x-axeln. Ett konkret exempel är funktionen $f(x) = \ln x$, vars graf illustreras på sidan 173 i Adams. Här är $D(f) = (0, \infty)$.

(d) Detta är SANT, och här följer ett bevis. Vi måste visa att

$$|\cos^3 t + \sin^3 t| \leq 1. \tag{1}$$

Först, enligt *triangelolikheten* (Adams, s.8), så har vi att

$$|\cos^3 t + \sin^3 t| \leq |\cos^3 t| + |\sin^3 t|. \tag{2}$$

Näst, eftersom $|\cos t| \leq 1$ för alla vinklar t, och likadant för sinus, så gäller att

$$|\cos^3 t| \leq |\cos^2 t| = \cos^2 t \;\text{ och }\; |\sin^3 t| \leq |\sin^2 t| = \sin^2 t. \tag{3}$$

Från (2) och (3) härleder vi att

$$|\cos^3 t + \sin^3 t| \leq \cos^2 t + \sin^2 t. \tag{4}$$

Men dessutom vet vi att för alla vinklar t gäller, enligt Pythagoras,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1. \tag{5}$$

Från (4) och (5) följer (1) direkt.

2 (a) Multiplicera upp och ner med komplex-konjugaten av nämnaren, dvs med $2+3i$. Då har vi att

$$\frac{5+4i}{2-3i} = \frac{5+4i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{(5+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(5\cdot 2 - 4\cdot 3) + i(5\cdot 3 + 4\cdot 2)}{2^2+3^2} = \frac{-2+23i}{13}.$$

(b) I polär form är

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Skriv $z := r(\cos\theta + i\sin\theta)$ så att $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$. Därför söker vi r och θ sådan att

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Därför måste $r^3 = 1$ s.a. $r = 1$, och $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, för något heltal n. Vi får tre olika lösningar genom att stoppa in $n = 0, 1, 2$, nämligen

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},$$
$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6},$$
$$z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Här har vi standarda vinklar vars cosinus och sinus vi har exakta värden för (se tabellen på sidan 48 i Adams), så att svaren kan skrivas som vanliga komplexa tal, nämligen

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_3 = -i.$$

3. Vi ställer upp ekvationssystemet som en utökad matris, nämligen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -9 & 8 & -1 \end{array}\right).$$

Följande sekvens av radoperationer

$$R_2 \mapsto 2R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2$$

tar matrisen till trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Om vi fortsätter med radoperationerna

$$R_1 \mapsto R_1 - 3R_2, \quad R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1,$$

så erhålls den radreducerade trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Därmed kan vi läsa av att z och w är fria variabler och att x och y ges i termer av dessa enligt

$$x = -1 + 7z - 5w, \tag{6}$$
$$y = 1 - 5z + 2w. \tag{7}$$

SVAR : $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z, w$ fria, x, y enligt (6) och (7)$\}$.

Lösningar till den vita versionen

1. Falskt, sant, falskt, sant.
2 (a) $(-2 + 23i)/41$.
(b) Som ovan.

3. $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z, w$ fria, $x = \frac{1}{4} - \frac{5z}{8} - \frac{9w}{8}$, $y = \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \frac{5w}{8}\}$.