Dugga 3 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Om $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ så är $f(f^{-1}(x_1)) = f(f^{-1}(x_2))$, dvs $x_1 = x_2$.

(b) Detta är FALSKT. Snarare gäller att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ om och endast om $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

(c) Detta är FALSKT. Värdemängden för arcsinus funktionen är $[-\pi/2, \pi/2]$. Därför är $\sin^{-1}(\sin x) = x$ om och endast om $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(d) Detta är SANT. Det givna gränsvärdet är bara derivatan av $f(x)$ i $x = 0$ då $f(x) = 0$. En deriverbar funktion måste vara kontinuerlig (Theorem 1, s.106).

2 (a) Multiplicera upp och ner med 'konjugaten' av täljaren, dvs med $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x+6}$. Då har vi att

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x+6}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+x) - (x^2-x+6)}{(x-3)(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x+6})} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x+6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{12} + \sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

(b) Den givna funktionen $f(x)$ är en sammansättning $f(x) = (g \circ h \circ k)(x)$ där

$$k(x) = \frac{\cos x}{x^2}, \quad h(x) = \sqrt[5]{x}, \quad g(x) = \sin x.$$

Vi kan derivera var och en av dessa lätt och får att

$$k'(x) = \frac{x^2(-\sin x) - (\cos x)(2x)}{(x^2)^2} = -\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3},$$

$$h'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5}, \quad g'(x) = \cos x.$$

Enligt kedjeregeln så är

$$f'(x) = g'[(h \circ k)(x)] \cdot h'[k(x)] \cdot k'(x).$$

Insättning ger

$$f'(x) = -\cos\left(\sqrt[5]{\frac{\cos x}{x^2}}\right) \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)^{-4/5} \cdot \left(\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}\right).$$

3. Vi deriverar VL implicit m.a.p. x. Enligt Leibnizregeln är

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx}.$$

Också enligt Leibnizregeln är

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x\frac{dy}{dx}.$$

Enligt Leibniz och kedjeregeln är

$$\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}xy\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right) \cdot \frac{\pi}{4}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right).$$

Därför är

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} - 3\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\pi}{2}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right) = 0,$$

från vilken man härleder efter lite algebra att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + 3y - \frac{\pi}{2}y\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)}{3x^2y^2 - 3x + \frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)}.$$

Vid punkten $(2,1)$ har vi då att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 + \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{6}, \quad \text{ty } \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Lösningar till den orangea versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.

2 (a) $1/\sqrt{6}$.

(b)

$$-\sin\left(\frac{x^2}{\sin x}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}\right).$$

3. $-7/6$.