Dugga 4 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den GULA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den VITA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Tillämpa den första logaritmlagen (Theorem 2(i), p.173) två gånger.

(b) Detta är SANT. Kom ihåg att $\cosh x$ är en jämn funktion medan att $\sinh x$ är udda. Rent allmänt, om $f(x)$ är en jämn funktion och $g(x)$ en udda funktion så är sammansättningen $(f \circ g)(x)$ jämn (se också uppgift 1(d) på Dugga 2). För i så fall är $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x))$, ty g udda, $= f(g(x))$, ty f jämn, $= (f \circ g)(x)$.

(c) Detta är FALSKT. Notera att $f'(x) \geq 0$ för alla x och $f'(x) > 0$ utom i $x = 0$. Därför är f en strängt växande funktion, så den har inga lokala extrempunkter alls.

(d) Detta är SANT. Observera att $f(0) = f(1) = 0$. Enligt Rolles sats har alltså f minst en kritisk punkt i det öppna intervallet $(0, 1)$.

2 (a) Man utnyttjar standardgränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Därför gäller också att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} = 1.$$

Vi kan skriva

$$\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+5x)} = \frac{2}{5} \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{5x}{\ln(1+5x)},$$

som medför att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+5x)} = \frac{2}{5} \times 1 \times 1 = \frac{2}{5}.$$

(b) Kalla arean för $A = A(t)$ och sidolängden för $x = x(t)$. Eftersom figuren är hela tiden en kvadrat så gäller vid alla tidpunkter att

$$A = x^2. \tag{1}$$

Därför är $x = 4$ då $A = 16$. Deriverar vi båda leden i (1) m.a.p. t så erhålls att

$$\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Det är givet att $dA/dt = 3$ hela tiden. Därför gäller att $dx/dt = 3/8$ då $x = 4$.

SVAR : $\frac{3}{8}\ ms^{-1}$.

3. $x = 3$ är en lodrätt asymptot. I närheten av $x = 3$ är täljaren uppenbarligen positiv (dess värden ligger nära $3^2 + 3 - 1 = 11$) så tecknet bestäms av nämnaren. Därför gäller att

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty.$$

Polynomdivision ger att

$$x^2 + x - 1 = (x+4)(x-3) + 11,$$

så att

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 3} = (x+4) + \frac{11}{x-3}.$$

Därför är

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) - (x+4) = 0,$$

så linjen $y = x + 4$ är en sned asymptot.

Grafen ser ut som den i Figure 4.31(a) på sidan 231. Den lodrätta linjen ska dock vara $x = 3$ och den sneda linjen ska vara $y = x + 4$.

Lösningar till den vita versionen

1. Sant, sant, sant, falskt.
2 (a) 4/3.
(b) $\frac{2}{5}\ ms^{-1}$.
3. Ser också ut som i Figure 4.31(a), men den lodrätta linjen ska vara $x = 4$ och den sneda linjen ska vara $y = x + 3$. .