Dugga 1 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Snarare gäller att

$$\left(\frac{a+b}{c}\right) / \left(\frac{a+b}{d}\right) = \frac{a+b}{c} \times \frac{d}{a+b} = \frac{d}{c}.$$

(b) Detta är SANT. Triangelolikheten säger att $|a+b| \leq |a| + |b|$ för godtyckliga tal a, b. Tag nu $a := y$, $b := x - y$ så får man att, för godtyckliga x, y gäller $|y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$, dvs $|x| \leq |y| + |x-y|$, som medför att $|x-y| \geq |x| - |y|$, v.s.v.

Anmärkning : Olikheten i denna uppgift kallas ibland för den *omvända triangelolikheten (eng.: reverse triangle inequality)*.

(c) Detta är FALSKT. Det blir lättare att inse varför om man höjer upp båda leden till den 6:e potensen. Då är frågan om $a^2 \leq a^3$ för alla positiva tal a. Men detta gäller om och endast om $a \geq 1$, medan att den omvända olikheten gäller då $0 < a \leq 1$.

(d) Detta är SANT. Rent allmänt, låt n vara ett positivt heltal som är ett *kvadrattal (eng.: perfect square)*, dvs $\sqrt{n}$ är också ett heltal. Säg $\sqrt{n} = k$, så $n = k^2$. Talet k har en primtalsfaktorisering, och en dubbelupprepning av denna utgör primtalsfaktoriseringen av k^2. Speciellt innebär detta att, i primtalsfaktoriseringen av ett kvadrattal, så finns varje enskilt primtal med ett jämnt antal gånger.

Det är nu lätt att inse att 60000000000000000002 inte är ett kvadrattal. För detta tal är uppenbarligen delbart med 2, och

$$\frac{60000000000000000002}{2} = 30000000000000000001,$$

ett udda tal. Därför finns primtalet 2 med bara en enda gång i primtalsfaktoriseringen, så vi kan inte ha ett kvadrattal.

2 (a) Jag ska ge tre alternativa lösningar, från den jag betraktar som den enklaste till den krångligaste.

1:a Lösning :

Vi söker alla tal x vars avstånd till 4 är större än deras avstånd till -1. Alltså handlar det just om de tal som ligger till vänster om mittpunkten mellan -1 och 4, dvs $3/2$.

SVAR : $\{x|x < 3/2\}$, alternativt $(-\infty, 3/2)$.

2:A LÖSNING :

Kvadrera båda leden så förvandlas olikheten till

$$(x-4)^2 > (x+1)^2.$$

Utveckla kvadraterna, så blir det

$$x^2 - 8x + 16 > x^2 + 2x + 1.$$

x^2-termerna kancellerar, och vi har kvar olikheten

$$-8x + 16 > 2x + 1,$$

som man lätt reducerar till $10x < 15 \Rightarrow x < 15/10 = 3/2$.

3:E LÖSNING :

Gör en falluppdelning m.a.p. tecknen på $x+1$ och $x-4$. Det blir tre fall :

Fall 1 : $x < -1$.

Då är både $x+1$ och $x-4$ negativa så olikheten blir

$$4 - x > -x - 1,$$

som förenklas till $4 > -1$, en ren sanning ! Alltså funkar alla x här, dvs vi får lösningarna $\{x|x < -1\}$.

Fall 2 : $-1 \leq x \leq 4$.

Här är $x+1$ positiv och $x-4$ negativ, så olikheten blir

$$4 - x > x + 1,$$

som reducerar till $x < 3/2$. Så här får vi ytterligare lösningar $\{x| -1 \leq x \leq 3/2\}$.

Fall 3 : $x > 4$.

Här är både $x + 1$ och $x - 4$ positiva så olikheten blir

$$x - 4 > x + 1,$$

som reducerar till $-4 > 1$, ren nonsens ! Här får vi inga nya lösningar alltså.

Sammanlagt från Fall 1 och 2 får vi lösningsmängden $\{x|x < 3/2\}$.

(b) De viktiga punkterna är $x = -1$ och $x = 4$, och dessa delar upp $\mathbb{R}$ i tre intervaller (som i den 3:e lösningen till **(a)** ovan). Notera att kvotet är inte definierad i $x = -1$ och är lika med noll i $x = 4$.

Fall 1 : $x < -1$.

Både täljaren och nämnaren är negativa så kvotet är positiv.

Fall 2 : $-1 < x < 4$.

Nämnaren är nu positiv i stället och kvotet negativ.

Fall 3 : $x > 4$.

Täljaren är nu också positiv och därmed hela kvotet också.

SVAR : $\{x|x < -1\} \cup \{x|x > 4\}$. Alternativt kan du skriva svaret som $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

3. Man provar sig först fram till att $x = 2$ är en rot. Faktorsatsen innebär nu att $x - 2$ är en faktor till $x^3 + 3x^2 - 9x - 2$. Utför man polynomdivisionen så erhålls kvotet $x^2 + 5x + 1$, som innebär att ekvationen kan skrivas som

$$(x + 2)(x^2 + 5x + 1) = 0.$$

Därmed ges de övriga rötterna av lösningarna till den kvadratiska ekvationen $x^2 + 5x + 1 = 0$. Enligt den välkända formeln ges dessa av

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Lösningar till den gula versionen

1. Sant, falskt, falskt, sant.
2 (a) $\{x|x < 1/2\}$, alternativt $(-\infty, 1/2)$.
(b) $\{x|x < -2\} \cup \{x|x > 3\}$. Alternativt kan du skriva svaret som $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

3. $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.