Dugga 2 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den GRÖNA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Snarare gäller att

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

en standard formel (kolla i boken).

(b) Detta är SANT. Låt $h(x) = 2x + 3$ och notera att (i) h är uppenbarligen injektiv (ii) $g = f \circ h$. Rent allmänt gäller att en sammansättning av injektiva funktioner är injektiv. För att bevisa detta, låt f och h vara injektiva. För att bevisa att $f \circ h$ är injektiv vi måste visa att om $x_1 \neq x_2$ så är $(f \circ h)(x_1) \neq (f \circ h)(x_2)$. Men $(f \circ h)(x_1) = f(h(x_1))$ och likadant för x_2. Eftersom h är injektiv och $x_1 \neq x_2$ så gäller att $h(x_1) \neq h(x_2)$. Men då, eftersom f är injektiv, gäller i sin tur att $f(h(x_1)) \neq f(h(x_2))$, v.s.v.

(c) Detta är SANT. När systemet reduceras till trappstegsform så måste det finnas minst en fri variabel.

(d) Detta är FALSKT. Det finns exempel på funktionspar (f, g) som uppfyller $f \circ g = g \circ f$, t.ex. om $f(x) = x + 2$ och $g(x) = x + 3$ så är $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x + 5$. Men de allra flesta paren kommuterar inte. T.ex. om $f(x) = x + 1$ och $g(x) = x^2$ så är

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1,$$

medan att

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

2 (a) I matrisform ges systemet av

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

När man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Nu gör vi bakåtsubstitution. Den 3:e raden ger $z = 2$ direkt. Insättning i den 2:a raden ger

$$3y - z = 0 \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}.$$

Insättning i den 1:a raden ger

$$x - y + z = 1 \Rightarrow x - \frac{2}{3} + 2 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

SVAR : $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 2$.

(b)

$$\frac{i}{5+3i} = \frac{i(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{5i+3}{5^2+3^2} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i.$$

3. Vi börjar med att konstatera att

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Skriv $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sådan att $z^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta)$. Om $z^6 = -3$ då måste

$$r^6 = 3 \tag{1}$$

och

$$6\theta = \pi + (\text{någon multipel av } 2\pi). \tag{2}$$

Eq. (1) ger direkt att $r = \sqrt[6]{3}$. Vi kan skriva (2) mer utförligt som

$$6\theta = \pi + (2\pi)n, \quad \text{för något } n \in \mathbb{Z},$$

och därmed härleda att

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \quad \text{för något } n \in \mathbb{Z}.$$

Sex olika lösningar fås genom att sätta $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (därefter blir det upprepning). Dessa ger respektivt

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6},$$

sådan att de sex rötterna i polär form är

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \\
z_2 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \\
z_3 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \\
z_4 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right), \\
z_5 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right), \\
z_6 &= \sqrt[6]{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

Om vi nu noterar dessutom att

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} &= 0, \\
\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} &= \frac{1}{2}, \\
\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6} &= -\frac{1}{2}, \\
\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} &= 1,
\end{aligned}
$$

så kan vi gruppera röttera i 3 st par, nämligen

$$
\begin{aligned}
z_{1,4} &= \pm\sqrt[6]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \\
z_{2,5} &= \pm\sqrt[6]{3}\, i, \\
z_{3,6} &= \pm\sqrt[6]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Lösningar till den gula versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.
2 (a) $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{2}{7}$, $z = -\frac{6}{7}$.
(b) $\frac{5}{41} + \frac{4}{41}i$.

3. Som ovan, men byt ut $\sqrt[6]{3}$ mot $\sqrt[6]{2}$.