Dugga 3 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den RÖDA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den BLÅA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Snarare gäller att

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x,$$

en standard formel (kolla s.122 i boken).

(b) Detta är SANT. Gränsvärdet är kvotet mellan de ledande koefficienterna i de två polynomen. Kolla s.72 i boken.

(c) Detta är FALSKT därför ätt gränsvärdena kan vara lika. T.ex. säg att $f(x) = 2x$ och $g(x) = x$. Då är $2x > x$ för alla $x > 0$ men $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = f(0) = g(0) = 0$.

(d) Detta är FALSKT. Som ett specifikt exempel, tag $f(x) = (x-1)^2$. Då är $f'(x) = 2(x-1)$ och $f''(x) = 2$ sådan att $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ och $f''(0) = 2$. Mer allmänt, notera först att kravet att $f(0) > 0$ är en röd sill (svengelska varning !), därför att detta villkor kan alltid uppfyllas genom att lägga till en konstant, som inte påverkar derivatorna. Att $f'(0) < 0$ betyder att grafen lutar neråt i $x = 0$. Att $f''(0) > 0$ betyder att denna neråtriktade lutningen avtar, m.a.o. att grafen är konkav upp (se avsnitt 4.3 i boken). Typexemplet för detta beteende är den vänstra halvan av en parabel (dvs alla punkter till vänster om vändpunkten). Alltså finns det gott om exempel för att illustrera att påståendet är FALSKT.

2 (a) Låt $u = \frac{x^2+1}{\cos x}$ sådan att $y = \sin u$. Enligt kedjeregeln är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Uppenbarligen är $\frac{dy}{du} = \cos u$. Vi använder kvotregeln för att komma fram till att

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x\cos x + (x^2+1)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Sammanlagt har vi därmed att

$$\frac{dy}{dx} = \left[\cos\left(\frac{x^2+1}{\cos x}\right)\right] \times \left[\frac{2x\cos x + (x^2+1)\sin x}{\cos^2 x}\right].$$

(b) Vi har

$$\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}.$$

Sätt $t := x-2$ och notera att

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$$

ett standard g.v. Därför har vi att

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\right)\left(\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right) = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4}.$$

3. Vi deriverar implicit m.a.p. x och får (m.h.a. Leibnizregeln för mittentermen) att

$$2x - y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

som leder till formeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2x}{3y^2-2xy}.$$

Då är det bara att sätta in $x=5, y=2$ så får vi att derivatan i punkten $(5,2)$ är

$$\frac{2^2-2\cdot 5}{3\cdot 2^2 - 2\cdot 2\cdot 5} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}.$$

Lösningar till den blåa versionen

1. Sant, falskt, falskt, falskt.
2 (a)

$$\frac{dy}{dx} = \left[-\sin\left(\frac{x^2+1}{\sin x}\right)\right] \times \left[\frac{2x\sin x - (x^2+1)\cos x}{\sin^2 x}\right].$$

(b) $\frac{1}{2}$.

3. $-\frac{7}{4}$.