Dugga 4 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den GULA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den BLÅA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Definitionsmängden till f^{-1} sammanfallar med värdemängden till f. Ett exempel på en injektiv funktion som är definierad på hela $\mathbb{R}$ och vars värdemängd inte är hela $\mathbb{R}$ är $f(x) = \tanh(x)$. Då är $V(f) = (-1, 1)$.

(b) Detta är SANT. Enligt Rolles sats finns det en kritisk punkt någonstans i det öppna intervallet $(0, 1)$ och en till i det öppna intervallet $(1, 2)$.

(c) Detta är SANT. Att $\log_a 10 < \log_b 10$ medför att $b < a$, som i sin tur medför att $\log_a b < 1$.

(d) Detta är FALSKT. Kom ihåg att

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Därför gäller enligt kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} 2x) = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+2x^2}.$$

2 (a) *Metod 1* : Utnyttja ett standard gränsvärde.

Gränsvärdet som skall utnyttjas (kolla föreläsningsanteckningarna, för det står tragiskt nog inte i boken !) är

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \tag{1}$$

Notera att (1) bevisas genom att inse att VL är själva definitionen av derivatan till e^t i $t = 0$, och eftersom $\frac{d}{dt}(e^t) = e^t$ så är derivatan lika med $e^0 = 1$.

Nu tillbaka till uppgiften. Skriv om det givna uttrycket så här :

$$\frac{e^{2x} - (1-x)}{x} = \frac{(e^{2x} - 1) + x}{x} = \frac{e^{2x} - 1}{x} + 1 = 2\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) + 1.$$

Därför gäller att

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - (1-x)}{x} = 1 + 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}\right).$$

Men det sista g.v. är lika med 1, enligt (1) (tag $t = 2x$). Så svaret är $1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Metod 2 : L'Hôpitals regel.

OBS! Detta är lite av en 'fusk' naturligtvis eftersom vi har inte gått igenom varför denna regel fungerar, men den ger ett väldigt smidigt sätt att lösa uppgifter som denna.

Notera att både täljaren och nämnaren går mot noll. Därför kan L'Hôpitals regel tillämpas och vi får att

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - (1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^{2x} - (1-x)]}{\frac{d}{dx}[x]} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 1}{1} = \frac{2 \cdot e^0 + 1}{1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = 3.$$

(b) Först, till vänster har vi att

$$\log_4(2x+1) + \log_4(x-1) = \log_4[(2x+1)(x-1)] = \log_4(2x^2 - x - 1).$$

Till höger har vi att

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = \frac{\log_4 x}{1/2} = 2\log_4 x = \log_4 x^2.$$

Så ekvationen förvandlas till

$$\log_4(2x^2 - x - 1) = \log_4 x^2,$$

som måste innebära att $2x^2 - x - 1 = x^2$, därmed att $x^2 - x - 1 = 0$. Rötterna till denna kvadratiska ekvation är

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Den negativa roten är en falsk lösning ty då är t.ex. $\log_2 x$ odefinierad. Så svaret är $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

ANMÄRKNING : Talet $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ kallas för det *gyllene snittet.* Kolla Wikipedia.

3. Låt A,B,C,D,E vara följande punkter :

A = ljusstolpens topp (dvs själva ljuset),

B = ljusstolpens bas,
C = mannens ‘topp’,
D = mannens ‘bas’,
E = spetsen på mannens skugga.

Punkterna A och B är fixerade, medan att C,D,E rör sig då mannen går mot ljuset. Längderna $|AB| = 6$, $|CD| = 2$ är också fixerade. Kalla längden $|BD|$ för x och längden $|AE|$ för s. Dessa längder minskar medan att mannen går mot ljuset. Likformighet medför att

$$\frac{|ED|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

som leder till att $|EB| = \frac{3}{2}x$. Pythagoras ger då att

$$|EA|^2 = |EB|^2 + |AB|^2 \Rightarrow s^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 6^2. \tag{2}$$

Vi är intresserade av tidsderivaten av s. Om vi deriverar ekvation (2) implicit m.a.p. tiden t så härleder vi att

$$2s\frac{ds}{dt} = \frac{9}{2}x\frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

Det är givet att $dx/dt = -3$ hela tiden och vi är intresserade av den tidpunkt då $x = 2$. Enligt (2) är i samma ögonblick $s = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Om vi nu sätter allting in i (3) så får vi att i detta ögonblick,

$$2 \cdot (3\sqrt{5}) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot (-3),$$

som leder till att $ds/dt = -9/2\sqrt{5}$.

SVAR : Längden av sträckan från ljuset till skuggans spets minskar i $9/2\sqrt{5}$ m/s i det ögonblick då mannen är 2m från stolpen.

Lösningar till den blåa versionen

1. Falskt, sant, falskt, sant.
2 (a) 4.
(b) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. $\frac{4}{\sqrt{5}}$ m/s.