

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast lördag 17/01 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

b) Lös olikheten  $(1 - x)(x^2 + x + 4) \leq 0$ . (3p)

c) För vilka  $\theta \in [0, 2\pi)$  gäller att  $\sin 2\theta = \sin \theta$  ? (2p)

d) Kedjeregeln uppgift (fylls i av Lennart) ...

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2}$$

f) Funktionen  $f(x) = \dots$  är injektiv (fylls i av Lennart) (3p)

**Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.**

2. Låt  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (-2, -1, 2)$ ,  $C = (1, 0, 1)$  och låt  $P$  vara planet (6p)  
 $2x + 3y - z = 0$ .

a) Ange en ekvation för planet  $Q$  som är parallell med  $P$  och innehåller punkten  $A$ .

b) Beräkna avståndet mellan  $Q$  och punkten  $B$ .

c) Ange skärningspunkten mellan  $Q$  och linjen genom  $B$  och  $C$ .

**Var god vänd!**

3. Ange värdemängden till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln|x - 3| + \arctan x$$

då definitionsmängden begränsas till intervallet  $[-1, 3)$ .

4. Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{x(x - 3)}{x - 4}$ . (6p)  
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.  
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. Låt  $M$  beteckna mängden av komplexa tal  $z$  som uppfyller ekvationen (6p)

$$|z - (2 + i)| = 3.$$

Vilket tal  $z$  i mängden  $M$  ligger närmast origo i det komplexa talplanet ?

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du (6p)  
behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar  
-1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- Om funktionen  $f$  är två gånger deriverbar så är  $f'$  kontinuerlig.
- Om  $z$  är ett komplext tal sådan att  $\text{Arg}(z) = 20^\circ$ , så är  $\text{Re}(z^{100}) < 0$ .
- Derivatans av  $10^x$  är lika med  $x \cdot 10^{x-1}$ .
- Om  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$  så är  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)^{g(x)} = 1$ .
- Om  $f$  är en injektiv och växande funktion så är  $f^{-1}$  avtagande.
- För alla reella tal  $x$  och  $y$  gäller att  $|\sin(x + y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$ .

7. a) Formulera både *mellanliggandevärdesatsen* och *extremvärdesatsen* för (3p)  
kontinuerliga funktioner.

- b) En F1-bil kör ett varv på en 6km lång bana på exakt 2 minuter. För- (3p)  
klara med hjälp av satserna ovan varför bilens hastighet är exakt  
50m/s någonstans på varvet.

Zhwu ni hao ueng!  
/Peter