INLEDANDE MATEMATIK 2009-01-17

1) a) Systemets totalmatris överförs via radoperationer till reducerad trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad z \text{ fri variabel.}$$

Lösningar: $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$

b) $(1-x)(x^2+x+4) \le 0 \iff (1-x)\Big(\underbrace{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{15}{4}}_{>0}\Big) \le 0 \iff 1-x \le 0$

Olikheten sann $\iff$ $\underline{\underline{x \ge 1}}$

c) $\sin 2\theta = \sin\theta \iff 2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta \iff \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \text{eller} \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \theta = n\cdot\pi \\ \text{eller} \\ \theta = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \end{cases}$ (n heltal)

I $[0, 2\pi)$ finns då lösningarna $\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi/3 \\ \theta_3 = \pi \\ \theta_4 = 5\pi/3 \end{cases}$

d) Vi söker $\frac{dy}{dt}$ då $t=4$. Med $y = x^3-3x+5$, $x = \frac{\sqrt{t}}{2}+3$

får vi med kedjeregeln $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = (3x^2-3)\cdot\frac{1}{4\sqrt{t}}$

$t=4 \Rightarrow x=4$ och $\frac{dy}{dt} = \underline{\underline{\frac{45}{8}}}$

e) i) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)(\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot(x\ln x) = 1\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

ii) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(\ln x)^2} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}} = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = \underline{\underline{0}}$

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^{30}}{3^x+x^2} = \left\{\begin{array}{c} 3^x \\ \text{dominerar!} \end{array}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^x + \frac{x^{30}}{3^x}}{1+\frac{x^2}{3^x}} = \frac{0+0}{1+0} = \underline{\underline{0}}$

f) $f(x) = x^3+4x$, $\Phi = f^{-1}$. Då är, med $y=f(x)$, $\Phi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+4}$

$y=0$ svarar mot $x=0$ $\quad \Phi'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$y=-5$ — " — $x=-1$ $\quad \Phi'(-5) = \frac{1}{f'(-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$

2) a) Varje plan parallellt med $2x+3y-z=0$ har en ekvation av typen $2x+3y-z=D$

Vi sätter in koordinaterna för en känd punkt i planet: $A=(1,2,3)$. Vi får $D=5$. Planet Q har ekvationen $\underline{\underline{2x+3y-z=5}}$

b) Avståndet från $B=(-2,-1,2)$ till planet P: $2x+3y-z-0=0$

är $\frac{|2\cdot(-2)+3(-1)-1\cdot 2-0|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \underline{\underline{\frac{9}{\sqrt{14}}}}$

c) En vektor längs linjen genom B och C är $\overline{BC} = (1,0,1)-(-2,-1,2) = (3,1,-1)$

Denna linje har då vektorekvationen

$(x,y,z) = (1,0,1)+t(3,1,-1) = (1+3t, t, 1-t)$

som kombineras med planet P:s ekvation $2x+3y-z=0$

$2(1+3t)+3t-(1-t)=0 \iff t = -\frac{1}{10}$

Detta ger skärningspunkten $(1-\frac{3}{10}, \frac{-1}{10}, 1-(-\frac{1}{10})) = \underline{\underline{(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{11}{10})}}$

3) $f(x) = \ln|x-3| + \arctan x \qquad D(f) = [-1, 3)$.

f är deriverbar i hela intervallet med $f'(x) = \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x^2+1)}$

Vi konstaterar att f' har ett nollställe $x=1$ i $D(f)$, att $f'(x)>0$ i $[-1,1)$, $f'(x)<0$ i $(1,3)$ och $f(x)\to-\infty$ då $x\to 3$

Detta ger ett absolut maximum $f(1) = \ln 2+\frac{\pi}{4}$, och av kontinuiteten hos f sluter vi oss till att f antar alla reella värden $\le f(1)$.

$\underline{\underline{R(f) = (-\infty, \ln 2+\frac{\pi}{4}]}}$

4/ $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-4} = \frac{x^2-3x}{x-4}$ Definierad i alla reella x utom $x=4$. Nollställen $x=0$, $x=3$

Asymptoter? $f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{då } x \to 4^- \\ +\infty & \text{då } x \to 4^+ \end{cases}$ Lodrät asymptot: $\underline{\underline{x=4}}$

$f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ Ingen vågräta asymptoter.

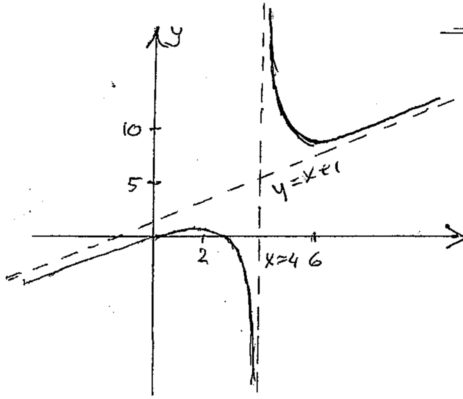
Sneda? $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-3}{x-4} \to 1$ då $x \to \infty$
$f(x) - 1 \cdot x = \frac{x}{x-4} \to 1$ då $x \to \infty$ $\Bigg\}$ $\underline{y = x+1}$ är $\underline{\text{sned asymptot}}$ i $\pm\infty$.

Växande, avtagande, extrempunkter? Derivera!

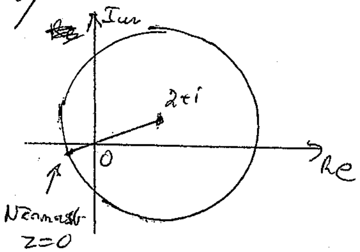
$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-4)-(x^2-3x)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}$$

x		2		4		6	
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	odef.	↘	9	↗

Vi ser av teckenvariationen hos f' att
$\underline{x=2 \text{ är ett lokalt maximum}}$
$\underline{x=6 \quad \text{—\,''\,—} \quad \text{minimum}}$



5/ $|z-(2+i)| = 3$ är ekvationen för en cirkel med centrum i $2+i$ och radie 3.



Den punkt på cirkeln som är närmast $z=0$ måste vara ändpunkt på radien genom $z=0$ (se figur!).
Avståndet mellan $2+i$ och denna punkt är alltså 3
— " — $2+i$ och $z=0$ är $|2+i| = \sqrt{5}$
— " — $z=0$ och närmaste punkten är $\underline{3-\sqrt{5}}$

6/ a) f 2ggr deriverbar $\Rightarrow$ f' deriverbar $\underset{\text{sats!}}{\Rightarrow}$ f kontinuerlig

$\underline{\underline{\text{Sant!}}}$

b) $\arg z^{100} = 100 \arg z = 2000° = 5 \cdot 360° + 200°$
(ej entydigt!) $\operatorname{Arg} z^{100} = 200°$, varmed $\operatorname{Re} z^{100} < 0$

$\underline{\underline{\text{Sant!}}}$

c) $\frac{d}{dx} 10^x = 10^x \ln 10$ (ej det som föreslås!) $\underline{\underline{\text{Falskt!}}}$

d) Välj t.ex. $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$, $g(x) = (x-2)^2$
Då är $f(x)^{g(x)} = e^{-1}$
Då $x \to 2$ gäller $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ men $f(x)^{g(x)} \to e^{-1}$ $\underline{\underline{\text{Falskt!}}}$

e) Exemplet $f(x) = x$ (med $f^{-1} = f$) visar att påståendet är falskt.

$\underline{\underline{\text{Falskt!}}}$

f) $|\sin(x+y)| = |\sin x \cdot \cos y + \cos x \sin y| \le$
$\le |\sin x| \cdot \underbrace{|\cos y|}_{\le 1} + \underbrace{|\cos x|}_{\le 1} \cdot |\sin y| \le |\sin x| + |\sin y|$

$\underline{\underline{\text{Sant!}}}$

---

7 b/ Bilens hastighet får anses vara en kontinuerlig funktion av tiden. På det slutna tidsintervallet för en varvning har enligt max-min-satsen denna hastighet ett största och ett minsta värde, säg v_{max} och v_{min}.
Med medelhastigheten $\frac{6000\,m}{120\,s} = 50$ m/s måste $v_{max} \ge 50$, $v_{min} \le 50$.
Om inte v är konstant 50 m/s, finns alltså ett värde >50 och ett värde <50. Satsen om mellanliggande värde garanterar existensen av en tidpunkt med hastigheten exakt 50 m/s.