Dugga 1 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Eftersom det finns två fler kolumner än rader så kommer två kolumner ändå att sakna pivotelement och därmed kommer lösningsmängden till $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, för vissa $\boldsymbol{b}$, att bestå av två fria parametrar.

(b) Detta är SANT och följer direkt från Sats 6, avsnitt 1.5 i boken.

(c) Detta är SANT. Se Sats 12(b), avsnitt 1.9.

(d) Detta är FALSKT. Vi kan ställa upp vektorerna som kolumnerna i 3×3 matrisen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris är diagonal så ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kommer att ha en unik lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$. M.a.o. A:s kolumner, dvs våra tre vektorer, är linjärt oberoende.

2 (a) Först utför vi radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

som tar matrisen till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då fortsätter vi med

$$R_1 \mapsto 5R_1 - R_2, \quad R_1 \mapsto \frac{1}{5}R_1, \quad R_2 \mapsto \frac{1}{5}R_2,$$

som frambringar den reducerade trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *Metod 1 : Bak substitution*

Sätt $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Ettorna i koefficientmatrisen är pivotpositionerna och ligger i kolumner 1,2 och 4. Därmed kommer x_3 och x_5 att vara de fria variablerna. De tre ekvationerna i systemet, i omvänd ordning, blir

$$\begin{aligned} x_4 + 3x_5 &= 2, \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 2, \end{aligned}$$

och, i termer av de fria parametrarna, räknar vi fram i tur och ordning att

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - 3x_5, \\ x_2 &= -8 - 3x_3 + 8x_5, \\ x_1 &= 12 + 4x_3 - 12x_5. \end{aligned}$$

Lösningsmängden består alltså av alla vektorer i $\boldsymbol{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

Metod 2 : Fortsatt reduktion till RREF

Man kan i stället utföra följande radoperationer på augmented matrisen

$$R_1 \mapsto R_1 - 7R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 5R_3, \quad R_1 \mapsto R_1 - 3R_2,$$

och därmed ta fram den reducerade trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Från detta kan lösningen skrivas ner direkt, och det blir som ovan.

3. Kalla avbildningens matris för M_T. Från de givna uppgifterna kan vi direkt skriva ner denna matris (dess kolumner är $T(\boldsymbol{e}_1)$ och $T(\boldsymbol{e}_2)$), nämligen

$$M_T = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Därmed har vi att

$$T\left[\begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 19 + 5 \cdot 11 \\ 7 \cdot 19 - 2 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 111 \end{pmatrix}.$$

Lösningar till den gula versionen

1. Sant, falskt, falskt, sant.
2 (a) Den reducerade trappstegsformen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösningsmängden består av alla vektorer i $\boldsymbol{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

3. $\begin{pmatrix} 29 \\ 58 \end{pmatrix}$.