Dugga 2 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den GULA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den VITA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Att kolonnerna är linjärt beroende är ekvivalent med att matrisen inte är inverterbar (se Sats 8(e), s.129), som i sin tur är ekvivalent med att dess determinant är noll (Sats 4, s.194).

(b) Detta är FALSKT. Om A var en kvadratisk, inverterbar matris så skulle vi kunna multiplicera båda leden till vänster med A^{-1} och dra slutsatsen (pga associativitet av matrismultiplikation) att $B = C$. Men annars behöver inte så vara fallet. Tilll exampel, tag

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då är $B \neq C$ men $AB = AC = O_2$.

(c) Detta är FALSKT. Man kan hitta på exampel där likhet gäller men i allmänhet finns det ingen enkel relation mellan determinanten av en summa av matriser och summan av determinanterna. Ett exempel där man inte har likhet är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är $\det(A) = \det(B) = 0$, men $\det(A + B) = \det I_2 = 1$.

(d) Detta är FALSKT. Kom ihåg att för inverterbara 2×2 matriser (Sats 4, s.119, som i sin tur är ett speciellt fall av Sats 8, s.203) så gäller att

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att inversen till den givna matrisen är snarare

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2 (a) *Metod 1 : Gauss elimnination*

Då vi utför radoperationen $R_2 \mapsto R_2 - R_1$ så ändras inte determinanten (Sats 3(i), s.192) och matrisen tas till diagonalformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten till en diagonalmatris är bara produkten av diagonaltalen (Sats 2, s.189), i detta fall nämligen $1 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 3 = -36$.

Metod 2 : Cofactor expansion

Det är klokast här att välja en cofactor expansion längs 4:e raden. Då plockas upp bara en term skild från noll, nämligen

$$(-1)^{4+4} a_{44} C_{44} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Denna 3×3 determinant beräknas i sin tur lättast genom en expansion längs 3:e raden, som ger att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2] = -12.$$

Svaret blir då $3 \cdot (-12) = -36$.

(b) *Metod 1 : Gauss elimination*

Vi ställer upp augmented-matrisen

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Då vi utför radoperationerna

$$\begin{aligned} R_1 &\mapsto R_1 - 3R_3, \\ R_2 &\mapsto R_2 - 2R_3, \\ R_1 &\mapsto R_1 - R_2, \end{aligned}$$

så reduceras A till I_3 och samtidigt förvandlas I_3 till A^{-1}, nämligen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metod 2 : Adjoint formeln

Sats 8, s.203 ger en formel för inversen till en matris i termer av cofaktorer. Formeln är oerhört klumpigt även för 3×3 matriser, men om man verkligen gillar den så får man naturligtvis använda den. För 3×3 matriser har vi att

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix},$$

där $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Notera att matrisen i fråga här har determinant 1 (den är diagonal med ettor på diagonalen). Därmed får vi att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Efter att ha beräknat all 2×2 determinanterna (notera att man ser direkt att flera av dem blir noll) så får man samma svar som ovan.

3. Genom att utföra radoperationerna

$$\begin{aligned} R_2 &\mapsto R_2 + R_1, \\ R_3 &\mapsto R_3 - 2R_1, \\ R_3 &\mapsto R_3 - R_2, \end{aligned}$$

så erhålls trappstegsformen

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen L är den 3×3 undre triangulära matris från vilken I_3 erhålls då vi utför samma sekvens av radoperationer. Då ser man direkt att

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösningar till den vita versionen

1. Falskt, falskt, sant, falskt.

2 (a) 36.
(b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$